Федеральное агентство по образованию

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Кафедра теоретической механики и ТММ

СТАТИКА

Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2009

УДК 531.1(0.75)+681.3.06(0.75)

Статика. Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов: учебно-методическое пособие / Сост. Н.В.Кузнецова, В.Е.Головко, Ю.Н.Лазарев, С.Г.Петров, М.В.Саблина; ГОУВПО СПбТГУРП. СПб., 2009. 27 с.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся примеры решения задач по теоретической механике по разделам «Статика». В начале пособия кратко изложены основные теоретические положения, необходимые для решения задач. Далее при рассмотрении решения каждой задачи указывается, как используется то или иное теоретическое положение.

Предназначено для студентов всех специальностей.

Рецензент: канд. техн. наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров Ю.А. Тихонов.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №1 от 31.01.06.).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета механики автоматизированных производств СПбГТУРП (протокол № 7 от 10.02.06.).

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов при изучении раздела "Статика" курса теоретической механики.

В пособии приводятся примеры решения задач с использованием различных теоретических положений статики. Использовались задачи по теоретической механике из сборника задач Мещерского И.В. Номера задач, соответствующие сборнику, приведены в скобках.

В задачах 1,2,3,4 используются условия равновесия системы сходящихся сил. В задачах 1 и 2 – условия равновесия плоской системы сходящихся сил, а в задачах 3 и 4 – условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

В задачах 5,6,7,8,9 используются условия равновесия произвольной плоской системы сил.

В задаче 10 рассматривается составная конструкция.

В задачах 11 и 12 рассматриваются условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

1. Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке.

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = 0. \tag{1}$$

Если все силы лежат в одной плоскости, то проектируя уравнение (1) на оси координат, расположенные в этой плоскости, получаем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0. \tag{2}$$

Если же имеет место пространственная система сил, то все силы проецируются на три взаимно перпендикулярные оси, и условия равновесия пространственной системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0. \tag{3}$$

2. Произвольная система сил

При приведении произвольной системы сил к центру получаем главный вектор, равный геометрической сумме сил входящих в систему:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \ , \qquad \textbf{(4)}$$

и главный момент для плоской системы, равный алгебраической сумме моментов всех сил относительно произвольного центра:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{iO} \ , \qquad \textbf{(5)}$$

а для пространственной системы сил – геометрической сумме моментов:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO} \ . \qquad \textbf{(6)}$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; M_O = 0. \qquad \textbf{(7)}$$

При проецировании уравнений (7) на две взаимно перпендикулярные оси получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0. \qquad \textbf{(8)}$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; \vec{M}_O = 0. \qquad \textbf{(9)}$$

При проецировании уравнения (9) на три взаимно перпендикулярные оси получаем шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

3. Статически определимые и статически неопределимые задачи

При исследовании равновесия произвольной системы сил на плоскости могут встретиться два принципиально различных случая:

1) количество неизвестных в задаче не превосходит числа уравнений статики для данной системы.

В этом случае задача является статически определимой.

2) количество неизвестных больше числа уравнений статики.

В этом случае задача является статически неопределимой;

Степенью статической неопределимости называют разность числа неизвестных и числа уравнений статики.

Решение задач на равновесие твердого тела, независимо от взаимного расположения приложенных к телу сил, рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин.
2. Изобразить активные силы.
3. Если твердое тело несвободно, то, применив закон освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей.
4. Рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей.
5. Использовать необходимые и достаточные условия (уравнения) равновесия в соответствии со взаимным расположением сил, приложенных к твердому телу, и определить искомые величины.

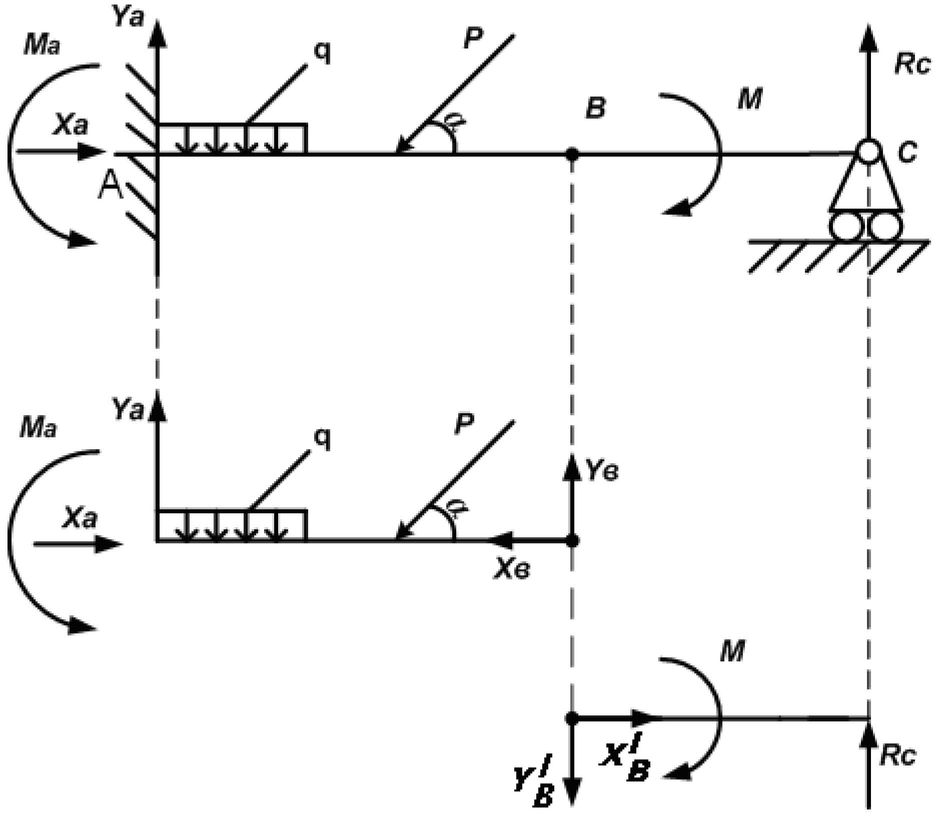
При рассмотрении плоской стержневой системы, один раз неопределимой, состоящей из двух частей, объединённых шарниром, решение достигается расчленением системы по шарниру на две части. После этого каждую часть рассматривают отдельно.

Рассмотрим систему двух балок, соединённых шарниром *B.* Система один раз статически неопределима:

$$S=n-k=4-3=1,$$

где: n - число неизвестных; k - число уравнений статики.

Расчленяем систему на две части по шарниру *B.* Через шарнир не передаётся момент с одной балки на другую, а передаётся только сила неизвестного направления, составляющие которой X_B и Y_B.



По принципу действия и противодействия:

$$\vec{X}_B = -\vec{X}_B^I;\ \vec{Y}_B = -\vec{Y}_B^I;\ \left|\vec{X}_B\right| = \left|\vec{X}_B^I\right|;\ \left|\vec{Y}_B\right| = \left|\vec{Y}_B^I\right|.$$

В результате получены две отдельные балки, для которых можно составить шесть уравнений для определения шести неизвестных:

$$(X_A,\ Y_A,\ M_A,\ X_B,\ Y_B,\ R_C)$$

Порядок решения задачи:

1) рассматривается балка *BC,* и определяются три неизвестных:

$$R_C,\ X_B^{'},\ Y_B^{'};$$

2) рассматривается балка *AB,* и определяются три неизвестных:

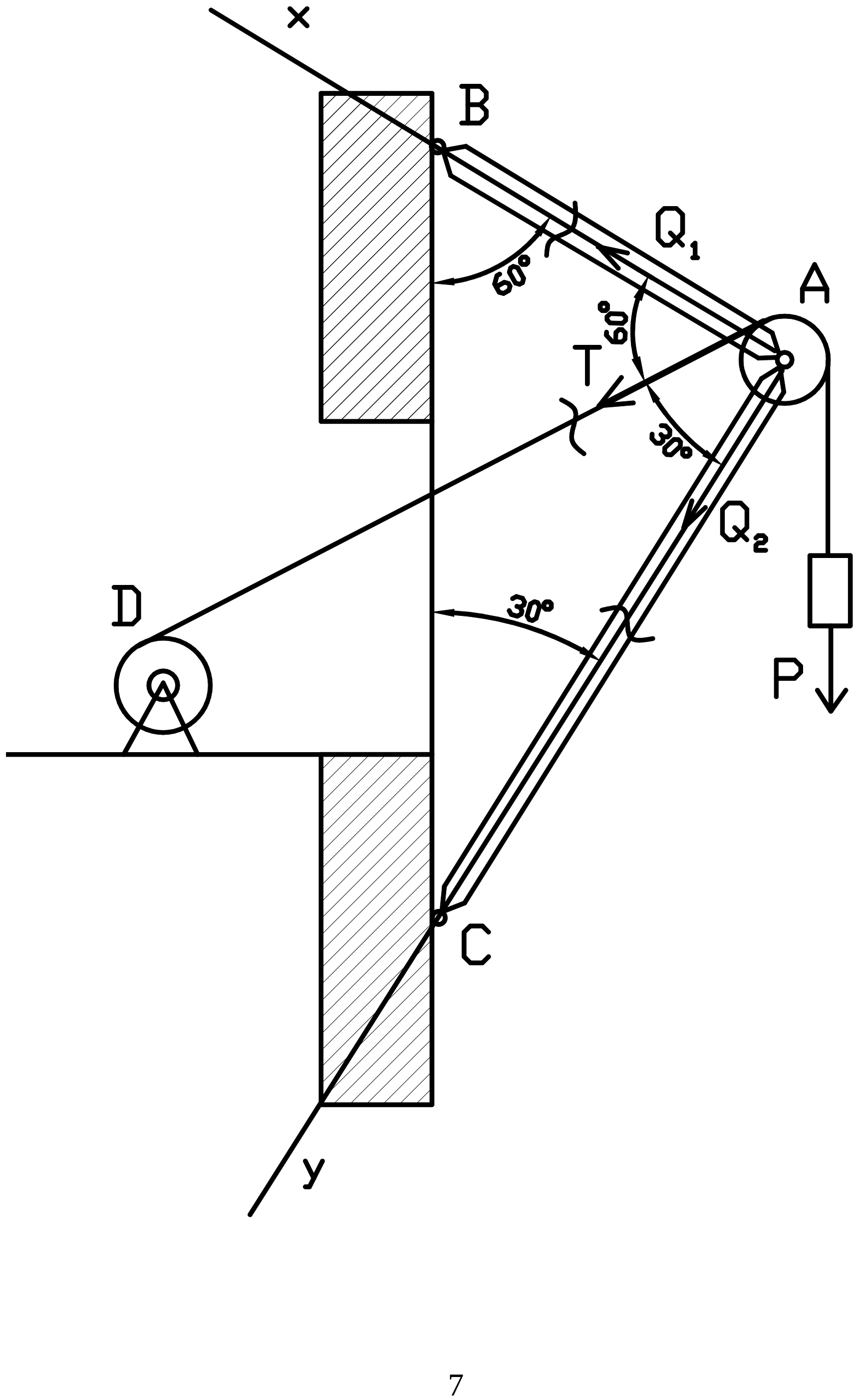
$$X_A,\ Y_A,\ M_A.$$

4. Примеры решения задач

Система сходящихся сил

Задача № 1 (2.16)

Груз P=20 кН поднимается краном ВАС посредством цепи, перекинутой через блок А и через блок D, который укреплён на стенке так, чтобы угол CAD=30°. Углы между стержнями крана: CBA=60°, ACB=30°. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях АВ и АС.



Решение

1. Составляем расчётную схему. Блок А принимаем за материальную точку, которая находится в равновесии под действием активной силы P и реакций связей Q_1, Q_2, T. Направления усилий Q_1 и Q_2 задаются в предположении, что стержни АВ и АС растянуты.

Так как ВАС=90°, то выбираем систему координат ХАУ. Стержень АВ совпадает с осью Х, а стержень АС – с осью У.

Все силы: P, Q_1, Q_2, T лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в точке А.

2. Составляем уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad Q_1 + T\cos 60° - P\cos 60° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad T\cos 30° + Q_2 + P\cos 30° = 0 \qquad (2)$$

3. Определяем искомые величины. Так как цепь в блоке А не закреплена, то усилия по всей длине цепи одинаковы, то есть T=P.

Из (1): $Q_1 = P\cos 60° - T\cos 60° = 0$, $T = P = 20$ кН.

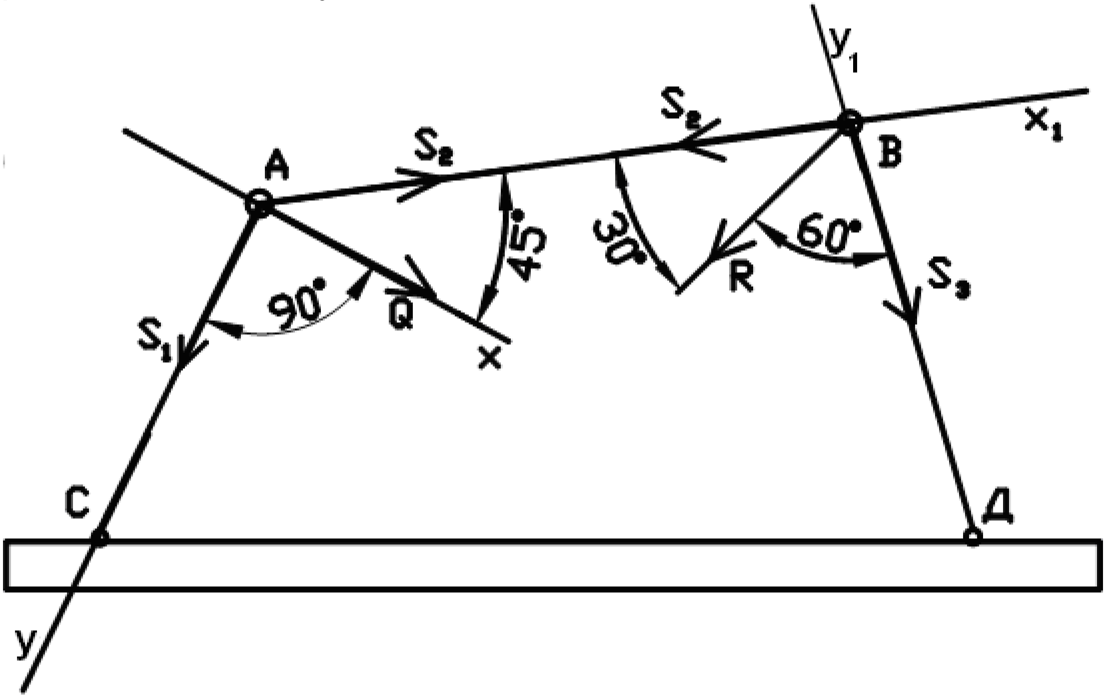
Из (2): $Q_2 = -P\cos 30° - T\cos 30° = -2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -34{,}6$ кН.

Усилия: $Q_1=0$ – стержень АВ не нагружен, $Q_2= -34{,}6$ кН – стержень АС сжат.

<u>Ответ:</u> $Q_1=0$; $Q_2= -34{,}6$ кН.

Задача № 2 (2.38)

К шарниру А стержневого шарнирного четырёхугольника САВД, сторона СД которого закреплена приложена сила Q=100 Н под углом 45° к АВ. Определить величину силы R, приложенной в шарнире В под углом 30° к АВ таким образом, чтобы четырёхугольник САВД был в равновесии, если углы САВ=135°; ДВА=90°.



Решение

Задача решается методом «вырезания» узлов А и В. Усилия в разрезанных стержнях направляются от узлов А и В внутрь стержней, предполагая стержни работающими на растяжение.

В начале вырезается узел А. В этом узле надо определить силу S_2, чтобы перейти к рассмотрению узла В, где приложена неизвестная сила R.

Составляем уравнения проекций сил на ось X, перпендикулярную усилию S1, чтобы это усилие не проектировалось на данную ось X:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad Q+S_2\cos45° = 0;$$

$$S_2 = -\frac{Q}{\cos 45^\circ} = -\frac{100}{0{,}707} = -141 \text{ Н}.$$

Рассматриваем равновесие сил, приложенных в узле В. Составляем уравнения проекций на ось X_1, перпендикулярную усилию S_3. (В данной задаче усилие S_3 определять не требуется).

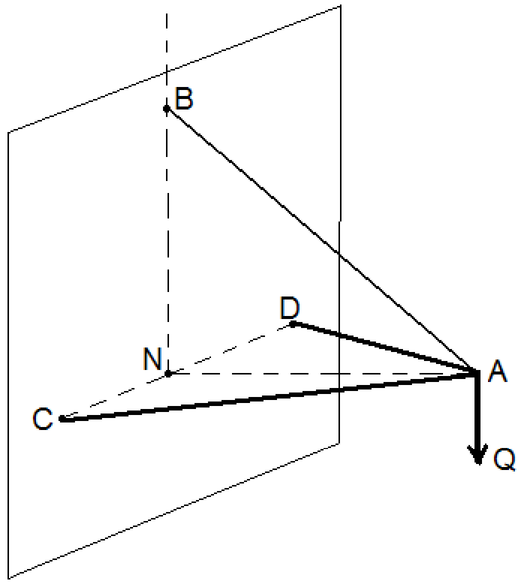
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix_1} = 0; \qquad -S_2 - R\cos30° = 0;$$

$$R = -\frac{S_2}{\cos 30^\circ} = -\frac{-141}{0{,}866} = 163 \text{ Н}.$$

Ответ: R= 163 Н.

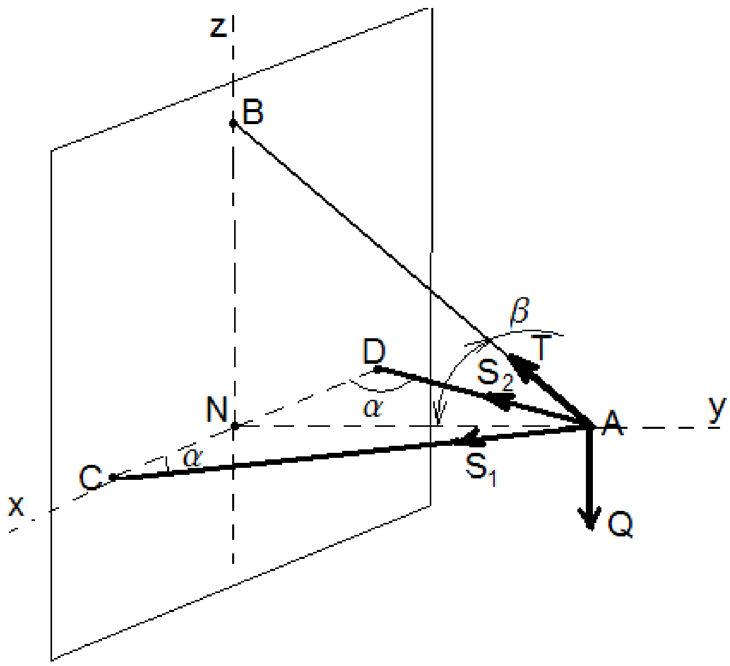
Задача № 3 (6.6)

Определить усилие в тросе АВ и в стержнях АС и AD, поддерживающих груз Q весом 180 Н, если АВ=170 см и AC=AD=100 см, CD=120 см, CN=ND, и плоскость треугольника СДА горизонтальна. Крепление стержней в точках А, С и D шарнирные.



Решение

1. «Вырезаем» угол А, который находится в равновесии под действием веса груза Q и реакций связей T, S_1, S_2



2. Выбираем направление осей координат и составляем уравнения равновесия для пространственной системы сходящихся сил.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad S_1\cos\alpha - S_2\cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \qquad -S_1\sin\alpha - S_2\sin\alpha - T\cos\beta = 0; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0; \qquad -Q + T\sin\beta = 0. \qquad (3)$$

3. Определяем искомые величины

Из треугольника ACN:

$$\cos\alpha = \frac{CN}{AC} = \frac{60}{100} = 0,6;$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8.$$

Из треугольника ABN:

$$\cos в = \frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{AC^2 - CN^2}}{AB} = \frac{\sqrt{100^2 - 60^2}}{170} = 0,471;$$

$$\sin в = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AN^2}}{AB} = \frac{\sqrt{170^2 - 80^2}}{170} = \frac{150}{170} = \frac{15}{17} = 0,882.$$

Из (3): $T = \dfrac{Q}{\sin в} = \dfrac{180}{0,882} = 204$ Н;

из (1): $S_1 = S_2 = S$;

из (2): $S = \dfrac{-T\cos в}{2\sin\alpha} = \dfrac{-204\cdot 0,471}{2\cdot 0,8} = -60,1$ Н.

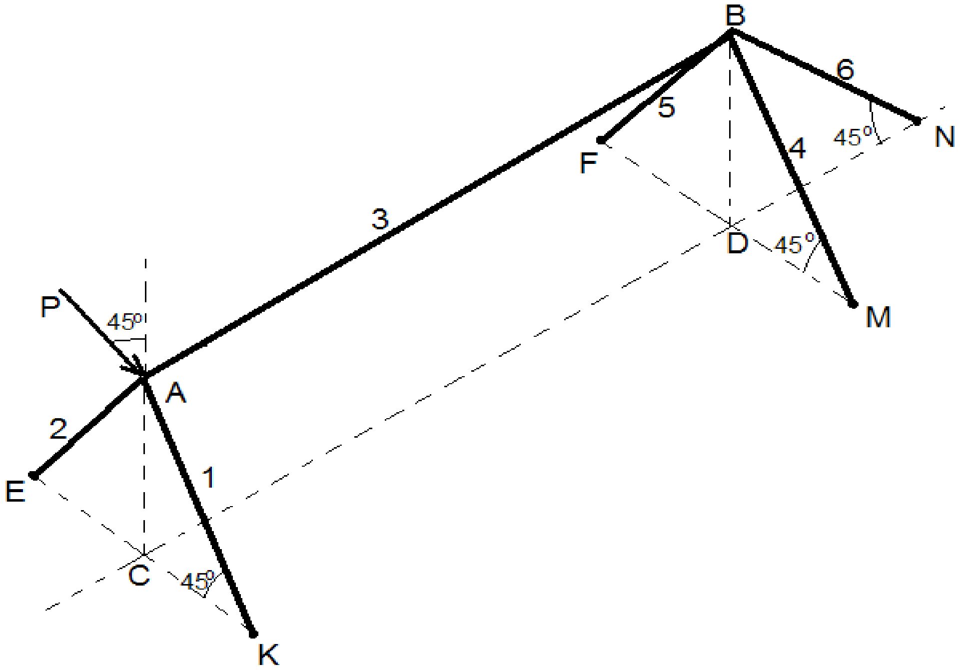
$$S_1 = S_2 = -60,1 \text{ Н}.$$

Стержни AC и AD работают на сжатие.

<u>Ответ:</u> T= 204 Н; $S_1 = S_2 = -60,1$ Н.

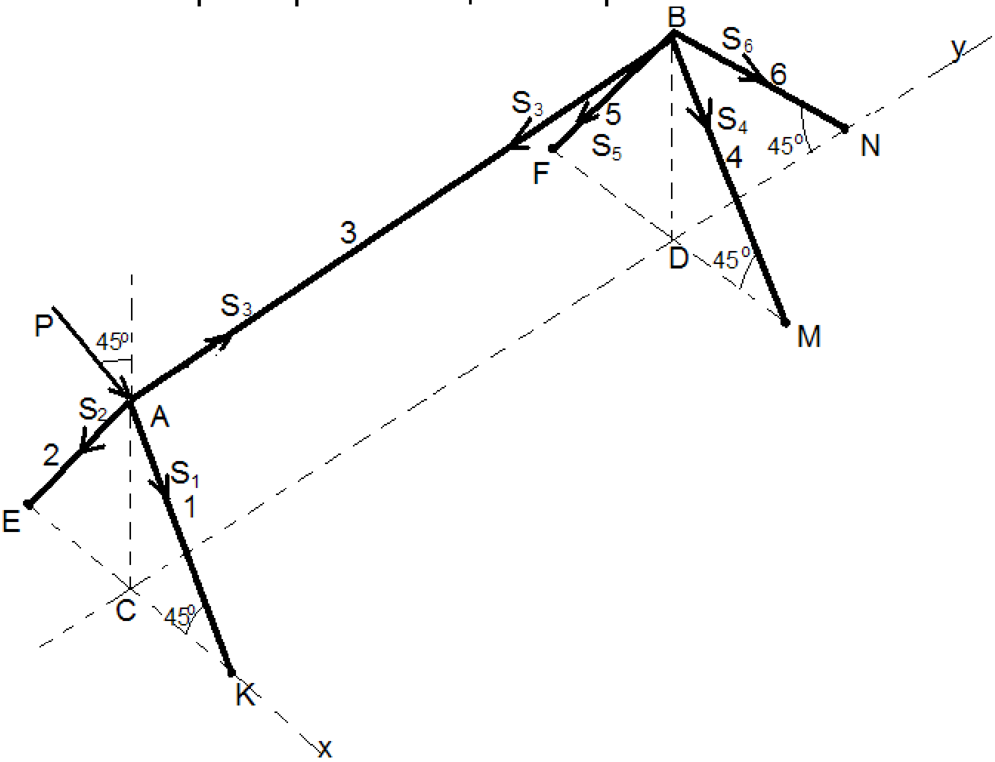
Задача № 4 (6.10)

На рисунке изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней 1,2,3,4,5,6. Сила P действует на узел A в плоскости прямоугольника ABCD; при этом её линия действия составляет с вертикалью CA угол 45°. EAK=FBM. Углы равнобедренных треугольников EAK, FBM и NDB при вершинах A, B и D прямые. Определить усилия в стержнях, если P=1 кН.



Решение

Мысленно вырезаем узлы A и B, рассекая стержни. Направляем усилия в стержнях вдоль стержней от узлов A и B внутрь стержней, предполагая стержни работающими на растяжение.



Начинаем решение с рассмотрения сил, приложенных в узле A. Направляем оси координат по взаимно перпендикулярным элементам конструкции.

Составляем три уравнения равновесия сил, приложенных в узле A:

1. $\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;$ $S_1\cos 45° - S_2\cos 45° = 0,$ откуда $S_1 = S_2 = S$.

2. $\sum_{i=1}^{n} C_{iy} = 0;$ $S_3 + P\cos 45° = 0,$ откуда $S_3 = -P\cos 45^0 = -0{,}707$ кН.

Стержень 3 работает на сжатие.

3. $\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$ $-P\cos 45° - S_1\cos 45° - S_2\cos 45° = 0,$ откуда

$$P + 2S = 0;\ S = S_1 = S_2 = -P/2 = -0{,}5 \text{ кН}.$$

Стержни 1 и 2 сжаты.

Составляем три уравнения равновесия сил, приложенных в узле В:

1. $\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;$ $S_4\cos 45° - S_5\cos 45° = 0;$ откуда $S_4 = S_5 = S^*$.

2. $\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;$ $-S_3 + S_6\cos 45° = 0;$ $S_6 = \frac{S_3}{\cos 45°} = \frac{-0{,}707}{0{,}707} = -1$ кН.

Стержень 6 работает на сжатие.

3. $\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$ $-S_4\cos 45° - S_5\cos 45° - S_6\cos 45° = 0,$ откуда $S_6 + 2S^* = 0$.

$S^* = S_4 = S_5 = -\frac{S_6}{2} = -\frac{-1}{2} = 0{,}5$ кН.

Стержни 4 и 5 работают на растяжение.

<u>Ответ:</u> $S_1 = S_2 = -0{,}5$ кН; $S_3 = -0{,}707$ кН; $S_4 = S_5 = 0{,}5$ кН; $S_6 = -1$ кН.

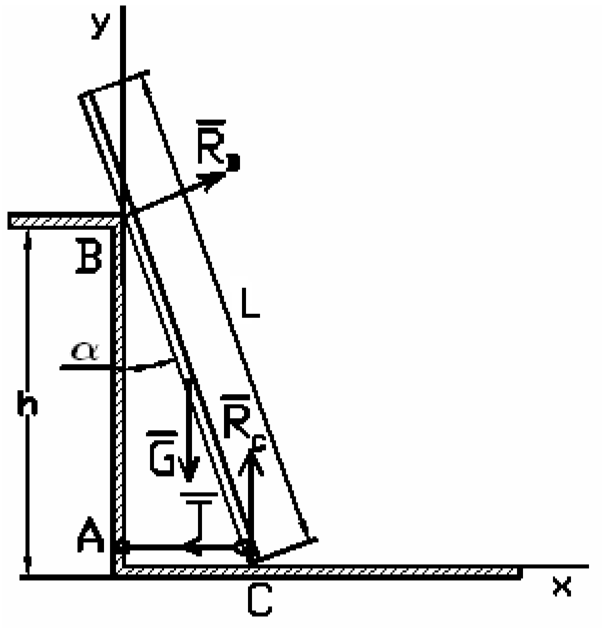
Равновесие тел без учета сил трения

Задача № 5 (4.7)

Однородная балка весом 600 Н и длиной L=4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой В – на столб высоты h=3 м, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении верёвкой АС, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение верёвки Т и реакции R_B столба и R_C пола.

Дано:
G=600Н
L=4м
α=30°
h=3м

Определить:
R_B, R_C, T



Решение

Балка ВС находится в равновесии под действием плоской системы сил: силы тяжести G, реакции гладкой поверхности в точках В и С и реакции верёвки Т.

При опирании на гладкую поверхность реакция направлена по общей нормали. Если одна из поверхностей является точкой, то реакция направлена по нормали к другой поверхности. Реакция верёвки (нити, каната, цепи) направлена вдоль нити и приложена в точке прикрепления верёвки к телу.

При составлении расчётной схемы прежде всего проводим систему координат ХАУ. Мысленно освобождаемся от связей, наложенных на балку, и заменяем их действие реакциями связей. Составляем три уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил. При составлении уравнения моментов сил за центр приведения, как правило, выбирается та точка, где пересекаются линии действия наибольшего количества неизвестных. В рассматриваемой задаче это точка С.

1) $\overset{n}{\underset{i=1}{\text{У}}} M_{iC} = 0;$ $\qquad G\cdot\frac{L}{2}\cos 60^{o} - R_B\cdot BC = 0$;

$$BC = \frac{BA}{\cos 30^{o}}; \qquad G\cdot\frac{L}{2}\cos 60^{o} - R_B\cdot\frac{BA}{\cos 30^{o}} = 0;$$

$$R_B = \frac{G\cdot\frac{L}{2}\cos 60^{o}\cdot\cos 30^{o}}{BA} = \frac{600\cdot 4\cdot 0{,}5\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2\cdot 2} = 173\,Н.$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad -T + R_B\cos 30^o = 0$.

$$T = R_B\cos 30^o = 173 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150\,\text{Н}.$$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \qquad R_C - G + R_B\cos 60^o = 0$;

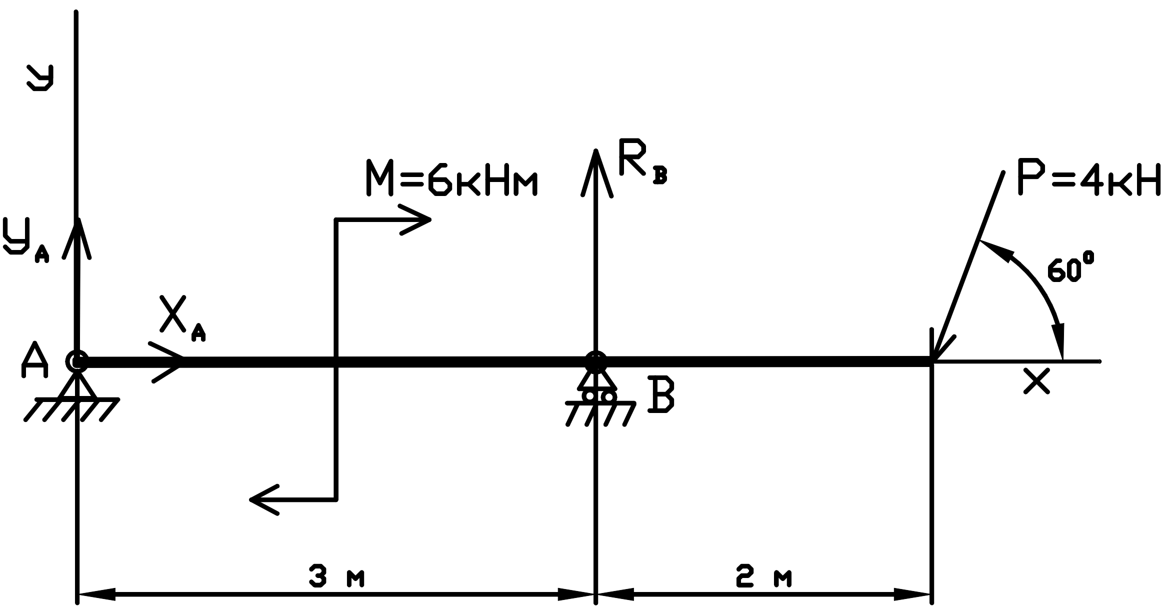
$$R_C = G - R_B\cos 60^o = 600 - 173 \cdot 0{,}5 = 513\,\text{Н}.$$

<u>Ответ:</u> R_B = 173 Н; R_C = 513 Н; T= 150 Н.

Произвольная плоская система сил

Задача № 6 (4.25)

Определить реакции опор А и В балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил с моментом М. Направления нагрузок и геометрические размеры указаны на схеме.



Решение

Балка находится в равновесии под действием задаваемых нагрузок: силы P, момента M и реакций связей в шарнирах A и B. В шарнирно-неподвижной опоре A модуль и направление реакции определяются через её проекции на оси координат X_A и Y_A, так как её направление заранее неизвестно. В шарнирно-подвижной опоре B реакция R_B направлена перпендикулярно плоскости качения катков.

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат X, Y. Опорные реакции X_A, Y_A, R_B направляем по положительному направлению осей. Отбрасываем связи, наложенные на балку и заменяем их действие реакциями связей. Рассматриваем равновесие балки под действием задаваемых сил P и M и реакций связей X_A, Y_A, R_B.

Составляем три уравнения равновесия для рассматриваемой плоской системы сил. При составлении уравнения моментов за центр приведения выбираем точку, где пересекаются линии действия большего количества неизвестных.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad X_A - P \cdot \cos 60^\circ = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \qquad Y_A + R_B - P \cdot \sin 60^\circ = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \qquad -M + R_B \cdot 3 - P \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 = 0. \tag{3}$$

Из уравнения **(3)**:

$$R_B = \frac{M + P\sin 60^\circ \cdot 5}{3} = \frac{6 + 4 \cdot 0{,}866 \cdot 5}{3} = 7{,}77\ \text{кН}.$$

Из уравнения **(2)**: $Y_A = -R_B + P \cdot \sin 60^\circ = -7{,}77 + 4 \cdot 0{,}866 = -4{,}31\,\text{кН}.$

Из уравнения **(1)**: $X_A = P \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0{,}5 = 2\,\text{кН}.$

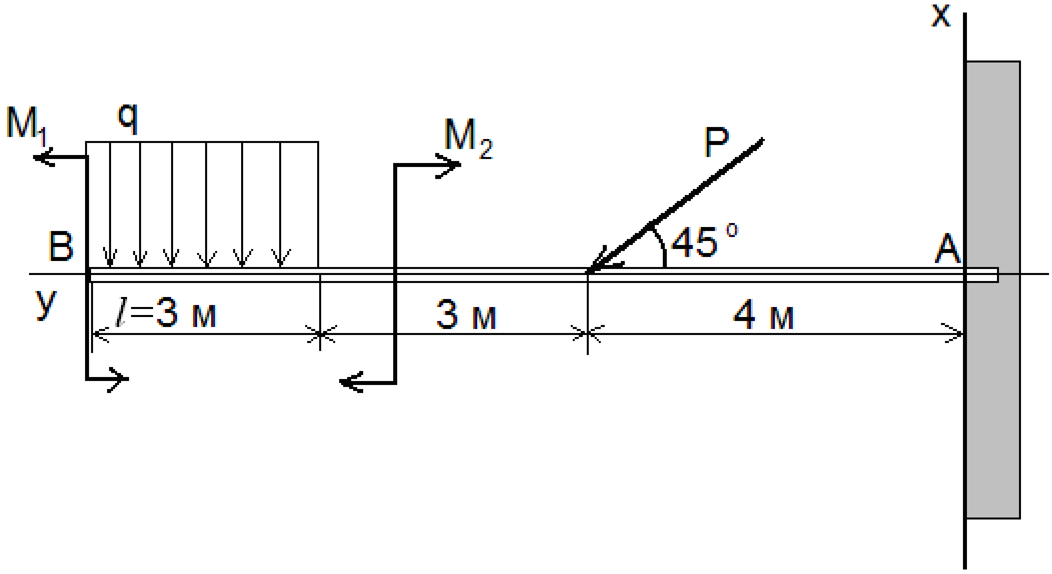
<u>Ответ:</u> X_A= 2 кН; Y_A= – 4,31 кН; R_B = 7,77 кН.

Задача № 7 (4.29)

Определить реакции заделки консольной балки, изображённой на рисунке и находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Дано: q=3 кН/м, M_1=2 кНм, M_2=3 кНм, $P = 4$ кН, размеры показаны на чертеже.

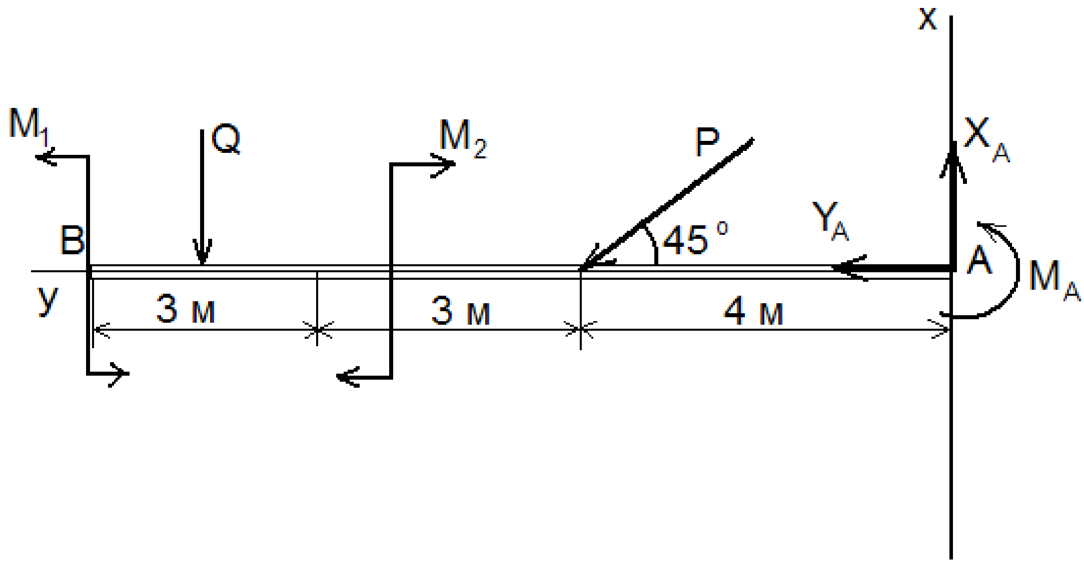
Определить: реакции жёсткой заделки X_A, Y_A, M_A.



Решение

1. Рассмотрим равновесие балки АВ, на которую действуют: активная сила P, пары сил с моментами M_1 и M_2, равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q и реакции связей X_A, Y_A, M_A.

2. Заменяем распределённую нагрузку эквивалентной сосредоточенной силой, приложенной в середине загруженного участка l. $Q = q \cdot l = 3 \cdot 3 = 9\,\text{kH}$



3. Составляем уравнения равновесия балки для плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad X_A - P \cdot \cos 45^{\circ} - Q = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \qquad Y_A + P \cdot \cos 45^{\circ} = 0; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \qquad M_A + P \cdot 4 \cdot \sin 45^{\circ} - M_2 + Q \cdot 8{,}5 + M_1 = 0 \,. \qquad (3)$$

4. Определяем искомые величины

из (1): $X_A = P \cdot \cos 45^{\circ} + Q = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 9 = 11{,}8$ кН;

из (2): $Y_A = -P \cdot \sin 45^{\circ} = -\ 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\ 2{,}8$ кН;

из (3): $M_A = -P \cdot 4 \sin 45^{\circ} + M_2 - Q \cdot 8{,}5 - M_1 =$

$$= -4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - 9 \cdot 8{,}5 - 2 = -\ 86{,}8 \text{ кН}.$$

<u>Ответ:</u> X_A= 11,8 кН; Y_A= – 2,8 кН; M_A = – 86,8 кН.

Задача № 8

Рама, изображенная на рисунке, находится в равновесии под действием равномерно распределённой нагрузки q, сосредоточенной силы P и момента M. Опорные закрепления: в точке A – шарнирно неподвижная опора, в точке B – стержень BC. Требуется определить реакции опор.

<u>Исходные данные:</u>

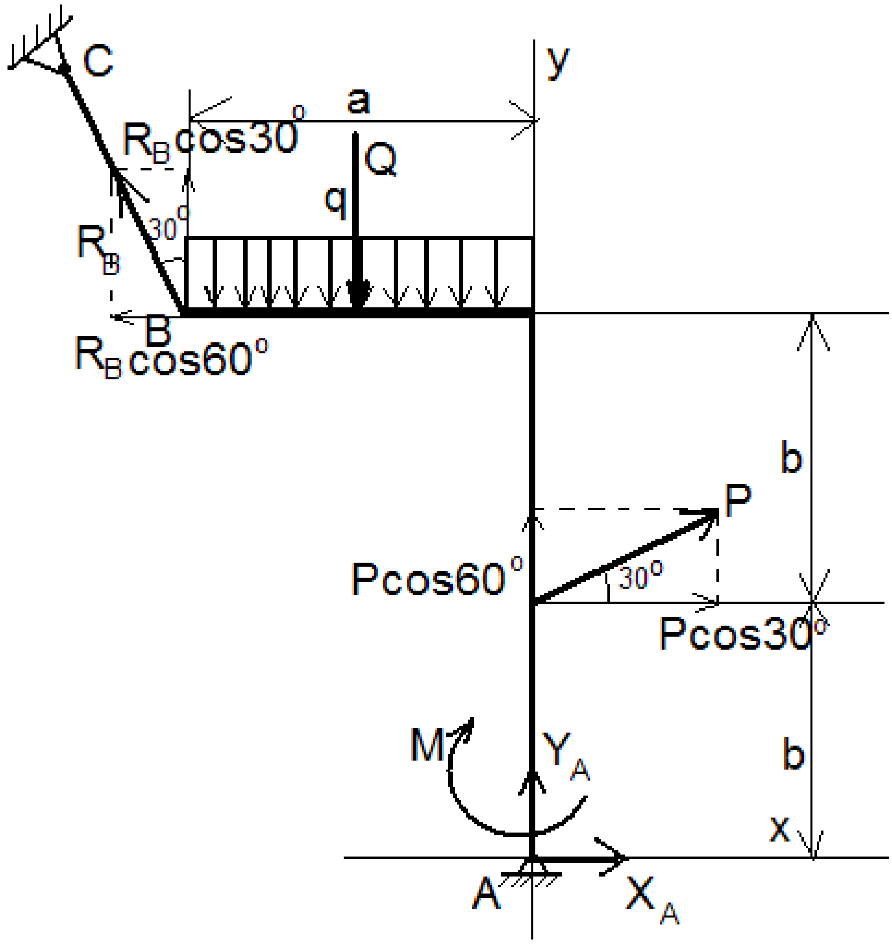
$q = 20$ кН/м;

$P = 10\sqrt{3}$ кН;

$M = 4$ кНм;

$a = 0,3$ м;

$b = 0,2$ м.



Решение

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат ХАУ с началом координат в точке А. Определяем направление опорных реакций. Опорную реакцию шарнирно-неподвижной опоры А будем определять через проекции на оси координат X_A и $У_A$. Реакция стержня ВС направлена вдоль стержня и приложена в точке В.

Заменим равномерно распределённую нагрузку q эквивалентной сосредоточенной силой Q, приложенной в середине загруженного участка:

$$Q = q \cdot a = 20 \cdot 0,3 = 6 \text{ кН}.$$

Составляем уравнения равновесия для заданной плоской системы сил.

При составлении уравнения моментов за центр приведения принимаем точку А, где находятся неизвестные X_A и $У_A$.

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0;$$

$$-M - P\cdot\cos 30^{o}\cdot b + Q\cdot\frac{a}{2} - R_{B}\cos 30^{o}\cdot a + R_{B}\cos 60^{o}\cdot 2b = 0;$$

$$R_{B} = \frac{-M - P\cos 30^{o} b + Q\cdot\frac{a}{2}}{a\cos 30^{o} - 2b\cos 60^{o}} = \frac{-4 - 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}15}{0{,}3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5} = -92\,\text{кН}.$$

2. $\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;$ $\quad - R_{B}\cos 60° + P\cos 30° + X_{A}=0;$

$$X_{A} = R_{B}\cos 60^{o} - P\cos 30^{o} = (-92)\cdot\frac{1}{2} - 10\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -61\ \text{кН}.$$

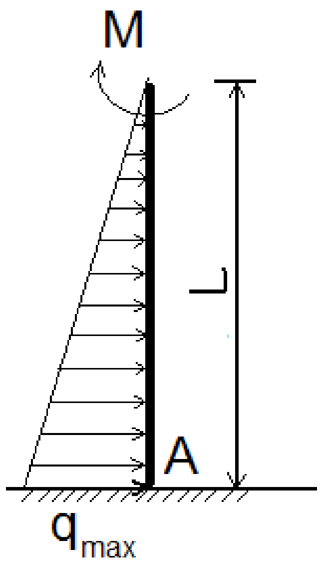
3. $\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;$ $\quad R_{B}\cos 30° - Q + P\cos 60° + Y_{A}=0;$

$$Y_{A} = Q - R_{B}\cos 30^{o} - P\cos 60^{o} = 6 - (-92)\cdot 0{,}866 - 10\sqrt{3}\,\frac{1}{2} = 76\,\text{кН}.$$

Ответ: X_A= – 61 кН; Y_A= 76 кН; R_B= – 92 кН.

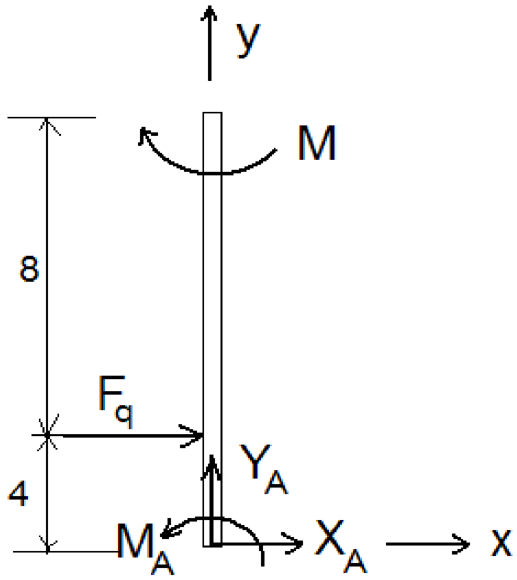
Задача № 9 (4.30)

Определить реакции в заделке невесомой консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил с моментом $M = 4$ кН·м и линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью $q_{max} = 1{,}5$кН/м. Длина балки $L = 12$ м.



Решение

Воспользуемся принципом освобождаемости от связей, отбросим связи и введем реакции, которые для жесткой заделки будут представлять собой две составляющие силы реакций по осям X_A и Y_A и пару с моментом M_A – моментом заделки.



Распределенную силу заменим сосредоточенной, в данном случае равной площади треугольника нагрузки:

$F_q = \frac{1}{2} q_{max} L = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 12 = 9$ кН, и проходящей через центр тяжести этого треугольника (точка пересечения медиан), то есть на расстоянии 1/3 от основания и 2/3 от вершины (4 м и 8 м).

Составим уравнения равновесия. Система сил – плоская, значит, уравнений равновесия будет 3. Запишем два уравнения проекций всех активных сил и реакций связей на оси X и Y и одно уравнение моментов всех сил относительно точки А:

$$X: \ X_A + F_q = 0;$$

$$Y: \ Y_A = 0;$$

$$M_A: \ M_A - F_q \cdot 4 - M = 0 .$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$X_A = -F_q = -9 \text{ кН}; \ Y_A = 0;$$

$$M_A = F_q \cdot 4 + M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

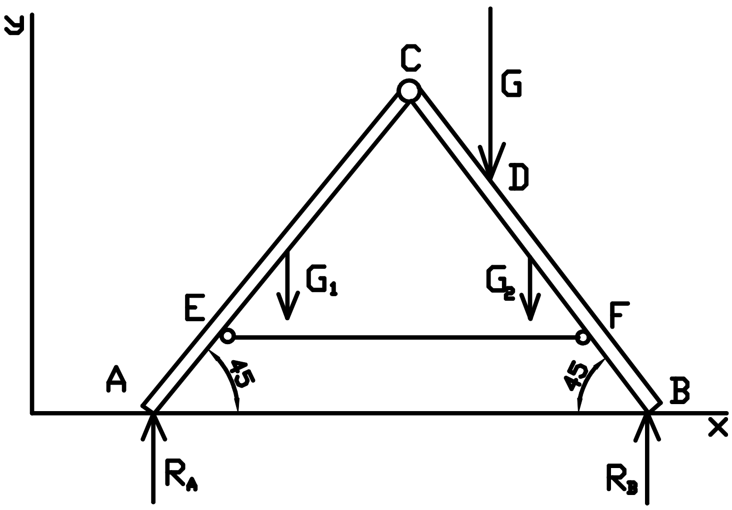
Таким образом, реакция в заделке представлена силой 9 кН, направленной влево, и парой с моментом 40 кН·м, действующей против часовой стрелки.

<u>Ответ:</u> $X_A = -9$ кН; $Y_A = 0$; $M_A = 40$ кН·м.

Равновесие системы твердых тел

Задача № 10 (4.36)

На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница, состоящая из двух частей AC и BC, длиной 3 м, весом 120 Н каждая, соединённых шарниром C и верёвкой EF; расстояние BF = AE = 1 м; центр тяжести каждой из частей AC и BC находится на её середине. В точке D, на расстоянии CD = 0,6 м стоит человек, весящий 720 Н. Определить реакции пола и шарнира, а также натяжение T верёвки EF, если углы BAC=ABC=45°.



<u>Дано:</u>

Составная лестница ABC

AC=BC=3 м,

AE=BF=1 м,

CD=0,6 м,

$\angle ABC = \angle BAC = 45°$,

C – шарнир,

$G_1 = G_2 = 120$ Н,

G=720 Н

<u>Определить:</u>

реакции пола R_A, R_B,

натяжение верёвки T,

реакции шарнира C.

Решение

1. Составляем расчётную схему. На составную лестницу ABC действуют активные силы: G – вес человека и G_1, G_2 – вес частей лестницы AC и BC; и реакции гладкой плоскости R_A и R_B.

2. Рассматриваем равновесие лестницы

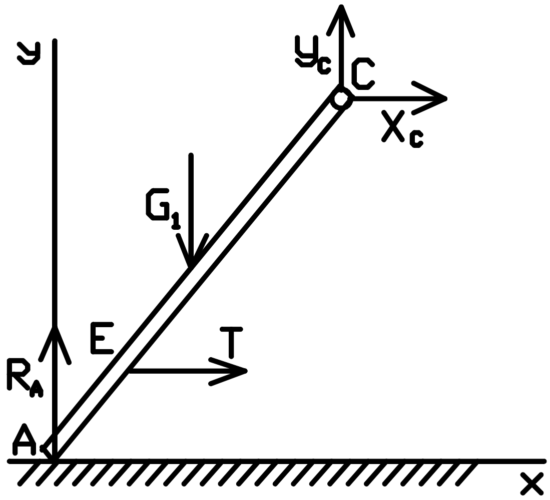
$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \quad R_B(3+3)\cos 45° - G_2 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 45° - G \cdot 3{,}6 \cdot \cos 45° - G_1 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 45° = 0;$$

$$R_B=\frac{6G_1+3{,}6G}{6}=120+0{,}6\cdot 720=552\ \text{Н}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB}=0;\quad -R_A\cdot 6\cos 45°+G_1\cdot 4{,}5\cdot\cos 45°+G\cdot 2{,}4\cdot\cos 45°+G_2\cdot 1{,}5\cdot\cos 45°=0;$$

$$R_A=G_1+0{,}4G=120+0{,}4\cdot 720=408\ \text{Н}.$$

3. Для определения реакций шарнира С (X_c и $У_c$), а также натяжения веревки Т расчленим лестницу на две самостоятельные части и рассмотрим равновесие сил, приложенных к левой части. На эту часть лестницы действуют силы G_1, R_A, T, X_C, Y_C.



Для этих сил составляем 3 уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}=0;\qquad T+X_C=0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}=0;\qquad R_A-G_1+У_C=0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC}=0;\qquad -R_A\cdot 3\cos 45°+G_1\cdot 1{,}5\cos 45°-T\cdot 2\cos 45°=0. \tag{3}$$

Из уравнения (3) определяем

$$T=\frac{R_A\cdot 3-G\cdot 1{,}5}{2}=72\,\text{Н}.$$

Из уравнения (1) определяем X_C:
$X_C=-72$ Н.

Из уравнения (2) определяем $У_C$:
$У_C=-R_A+G_1=-408+120=-288$ Н.

<u>Ответ:</u> $R_A=408$ Н; $R_B=552$ Н; $T=72$ Н; $X_C=-72$ Н; $У_C=-288$ Н.

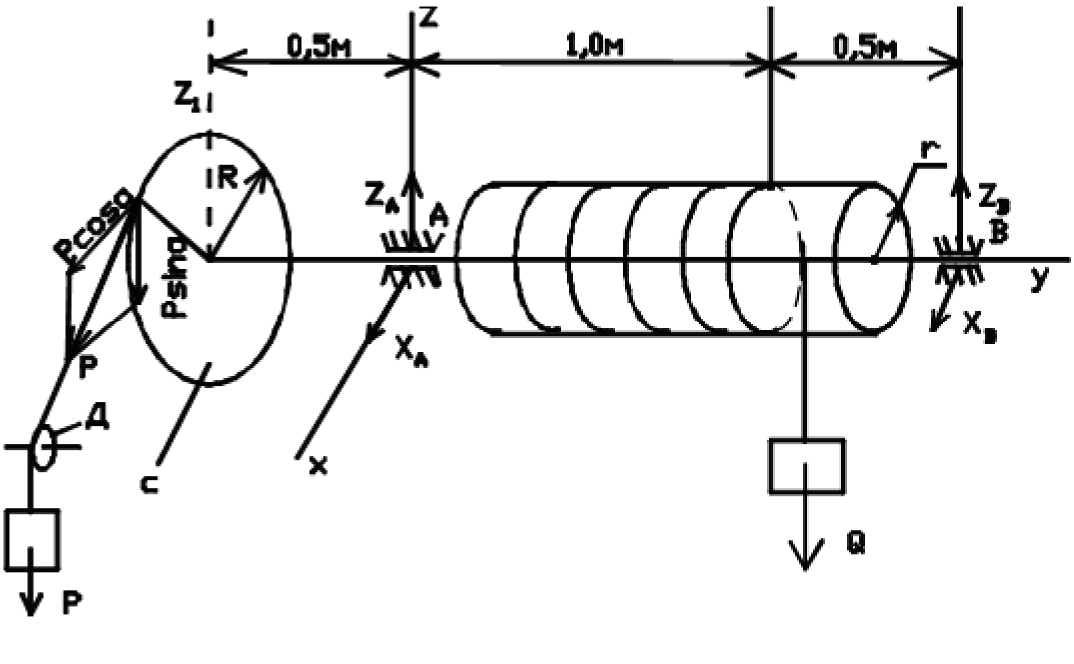
Пространственная система сил

Задача № 11 (8.17)

На вал AB ворота намотана верёвка, поддерживающая груз Q. Радиус R колеса C, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса барабана r вала; другие размеры указаны на рисунке. Верёвка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом P весом 60 Н, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом α=30^0. Определить вес груза Q, при котором ворот остаётся в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала и трением на блоке D.

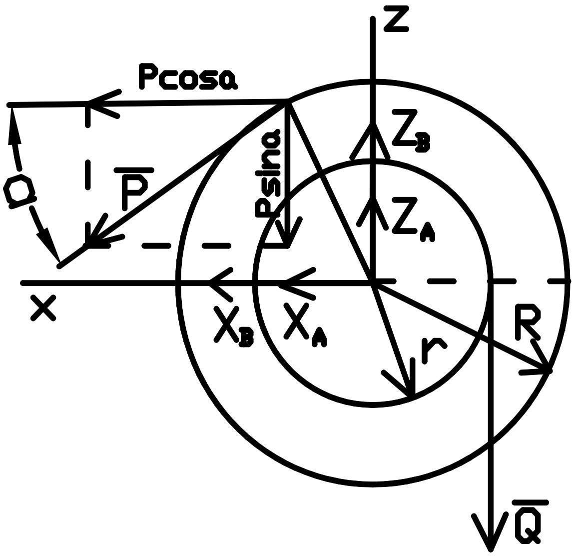
<u>Дано:</u> Вал AB с барабаном. Вес груза P=60 Н. Радиус барабана r, радиус колеса R.
R/r=6, α=30°.

<u>Определить:</u> X_A, Z_A, X_B, Z_B, вес груза Q.



Решение

1. Составляем расчётную схему. Рассматриваемая конструкция находится в равновесии под действием двух активных сил P, Q и реакций подшипников A и B. Реакции подшипников лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения У, и определяются через проекции на оси X и Z.
2. Составляем уравнения равновесия для рассматриваемой произвольной пространственной системы сил, составляем уравнение моментов сил относительно координатных осей:



1) $\sum\limits_{i=1}^{n} M_{iy} = 0.$

Проецируем конструкцию на плоскость XAZ, перпендикулярную оси Y.

Составляющие реакции подшипников X_A, Z_A, X_B, Z_B пересекают ось У и поэтому моментов относительно этой оси не создают.

$P{\cdot}R - Q{\cdot}r = 0.$

Откуда:

$$Q = P\frac{R}{r} = 60 \cdot 6 = 360 \text{ Н.}$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} M_{iz} = 0;$

$$-X_B{\cdot}1{,}5 + P\cos\alpha{\cdot}0{,}5 = 0;$$

$$X_B = \frac{P \cdot \cos\alpha \cdot 0{,}5}{1{,}5} = \frac{60 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 17{,}3 \text{ Н.}$$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} M_{ix} = 0;$

$$Z_B{\cdot}1{,}5 - Q{\cdot}1 + P{\cdot}\sin\alpha{\cdot}0{,}5 = 0;$$

$$Z_B = \frac{Q \cdot 1 - P\sin б \cdot 0{,}5}{1{,}5} = \frac{360 \cdot 1 - 60 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 230 \text{ Н.}$$

Составляем уравнения проекций сил на координатные оси:

4) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;$

$$X_A + X_B + P\cos\alpha = 0;$$

$$X_A = -X_B - P\cos\alpha = -17{,}3 - 60{\cdot}0{,}866 = -69{,}3 \text{ Н.}$$

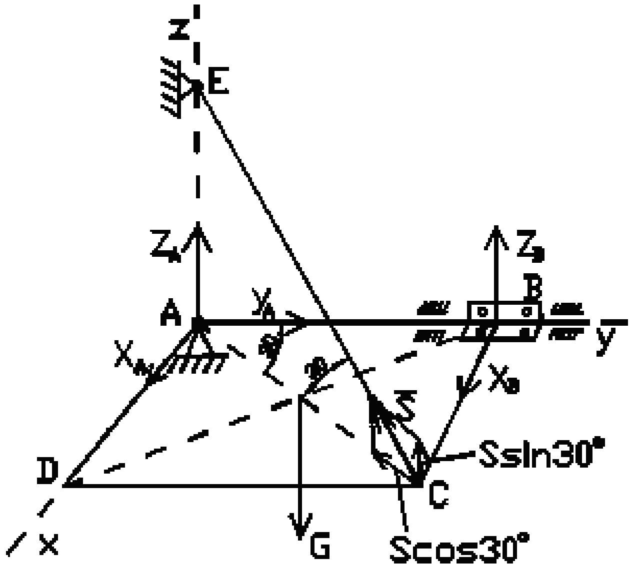
5) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$

$$Z_A + Z_B - Q - P\sin\alpha = 0;$$

$$Z_A = -Z_B + Q + P\sin\alpha = -230 + 360 + 60{\cdot}0{,}5 = 160 \text{ Н.}$$

<u>Ответ:</u> Q=360 Н, X_A=-69,3 Н, Z_A=160 Н, X_B=17,3 Н, Z_B=230 Н.

Задача № 12 (8.24)



Однородная прямоугольная рама весом G=20 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира А и петли В и удерживается в горизонтальном положении верёвкой СЕ, привязанной в точке С рамы и к гвоздю Е, вбитому в стену на одной вертикали с А, причём ∠ЕСА = ∠ВАС=30°. Определить натяжение верёвки S и опорные реакции.

Решение

1. Составляем расчётную схему. На схему действует активная сила – сила тяжести G и реакции связей. Шаровой шарнир А не даёт возможности перемещаться точке А в любом направлении. Реакция шарнира А определяется по трём составляющим проекциям на оси координат X_A, $У_A$, Z_A. Петля В допускает возможность перемещения точки В вдоль оси вращения У, но препятствует её перемещению в плоскости, перпендикулярной этой оси. Реакция петли В определяется по двум составляющим X_B и Z_B. Реакция верёвки СЕ направлена вдоль верёвки и приложена в точке прикрепления верёвки к раме, в точке С.

Рассматриваемая конструкция находится в равновесии.

2.Составляем уравнения равновесия для всех сил, приложенных к раме:

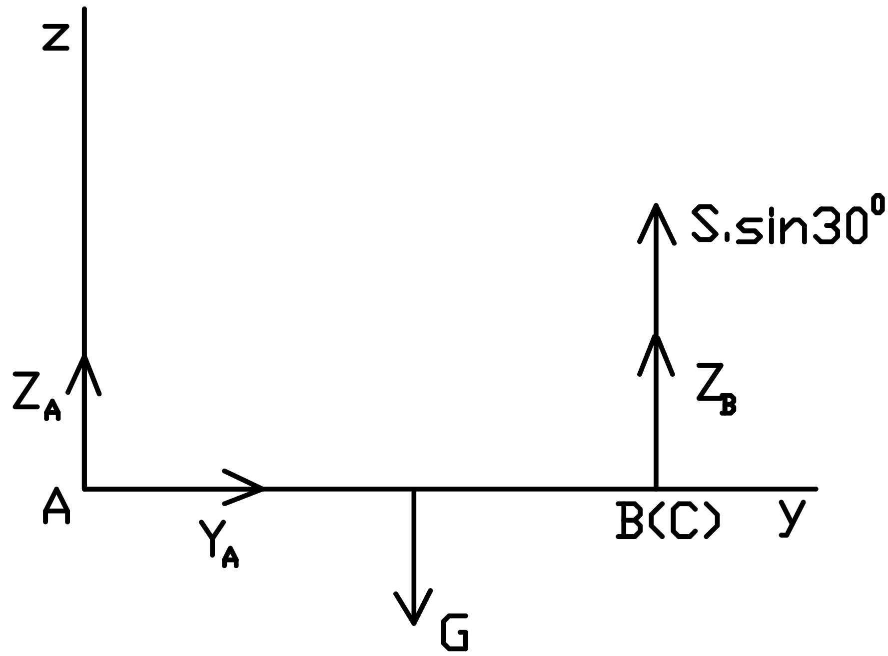
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - S\cos30°\cdot\sin30° = 0. \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad У_A - S\cos30°\cdot\cos30° = 0. \qquad (2)$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{У}} P_{iz} = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S\cdot\sin30° = 0 \tag{3}$$

Для составления уравнений моментов изобразим на вспомогательном чертеже проекции рассматриваемой конструкции вместе с силами на плоскостях, перпендикулярных к осям.

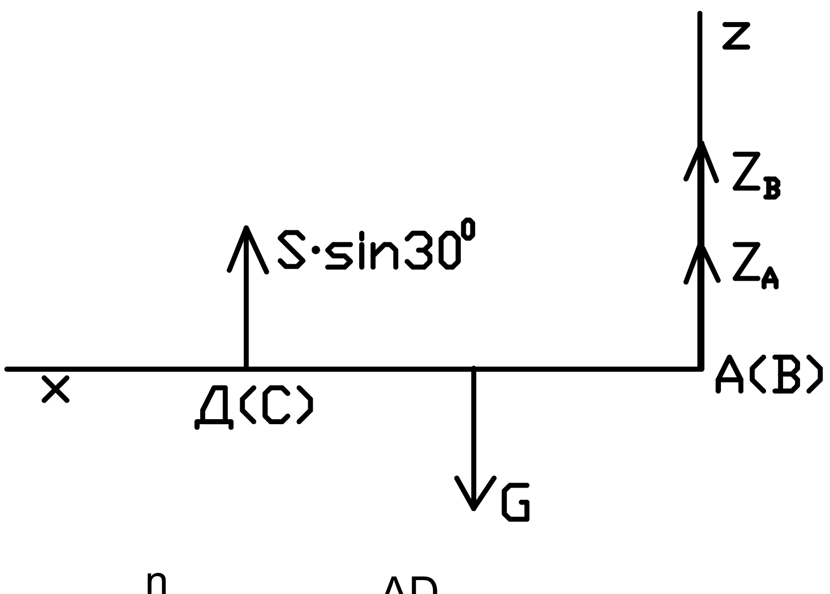
Плоскость, перпендикулярная оси X.



$$\overset{n}{\underset{i=1}{У}} M_{iX} = 0; \ -G\frac{AB}{2} + Z_B\cdot AB + S\cdot\sin30°\cdot AB = 0.$$

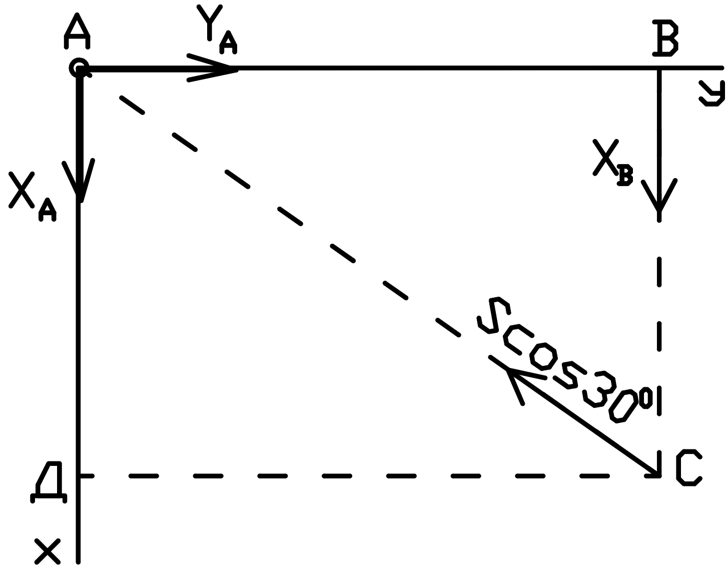
(4)

Плоскость, перпендикулярная к оси У.



$$\overset{n}{\underset{i=1}{У}} M_{iy} = 0; \ G\frac{AD}{2} - S\cdot\sin30°\cdot AD = 0. \tag{5}$$

Плоскость, перпендикулярная к оси Z.



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iZ} = 0;\quad X_B \cdot AB = 0 \tag{6}$$

3. Определяем искомые величины, решая уравнения (1)-(6):

из (6): $X_B=0$;

из (5): $S = \dfrac{G}{2\sin 30^\circ} = \dfrac{20}{2 \cdot 0{,}5} = 20$ Н;

из (4): $Z_B = \dfrac{G}{2} - S \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{20}{2} - 20 \cdot 0{,}5 = 0$ Н;

из (1): $X_A = S \cdot \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 8{,}66$ Н;

из (2): $У_A = S \cdot \cos 30^\circ \cos 30^\circ = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15$ Н;

из (3): $Z_A = G - Z_B - S\sin 30^\circ = 20 - 0 - 20 \cdot 0{,}5 = 10$ Н.

<u>Ответ:</u> $S=20$ Н; $X_A=8{,}66$ Н; $У_A=15$ Н; $Z_A=10$ Н; $X_B=Z_B=0$.

Библиографический список

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2001.Ч.1,2.

Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2002.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - СПб.: Лань, 1998.

Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2003.

Попов М.В. Теоретическая механика. - М.: Наука,1986.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А.Яблонского.- СПб.: Лань, 2001.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, 1998.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 1998.Ч1,2.

Содержание

Учебное издание

Кузнецова Наталья Владимировна
Головко Виктор Евгеньевич
Лазарев Юрий Николаевич
Петров Сергей Гаррикович
Саблина Маргарита Владимировна

СТАТИКА

Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Н.П.Новикова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2006г. ,поз. 7

Подп. к печати 10.102.06. Формат 60х84/16.
Бумага тип. №1. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,5. Усл. печ. л. 3,25. Изд. №7. Цена “С”. Заказ

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.