НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров»

МАТЕМАТИКА
Контрольная работа №2

Методические указания для студентов заочной сокращенной формы обучения

Санкт-Петербург
2009

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

УДК 517

Математика. Контрольная работа №2. Методические указания для студентов заочной сокращенной формы обучения / З. Л. Абжандадзе, Т. А. Забавникова, К. Ю. Лавров, И. Ю. Малова, Р. В. Пелюхов, Е. А. Титова; ГОУВПО СПбГТУРП. — СПб., 2009. — 35 с.

Работа содержит теоретический материал, методические указания и разобранные примеры к контрольной работе №2 по теме: «Дифференциальное исчисление функций одной и двух переменных».

Предназначается для студентов заочного факультета СПбГТУРП обучающихся по сокращенной программе.

Рецензент: зав. кафедрой теоретической механики и теории машин и механизмов СПбГТУРП, д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Тихонов.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №3 от 11.11.08).

Утверждены к изданию методической комиссией ФПЭ Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №4 от 24.12.08).

Редактор В. А. Басова
Техн. редактор Л. Я. Титова

Подп. к печати 26.12.08. Формат $60 \times 84/16$. Бумага тип N 3. Печать офсетная. Объем 2,25 печ. л.; 2,25 уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Изд. № 148. Цена «С». Заказ .

© Абжандадзе З. Л., Забавникова Т. А., Лавров К. Ю., Малова И. Ю., Пелюхов Р. В., Титова Е. А.
© ГОУВПО Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, 2009

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

1. Производная функции

В математике понятие производной возникает в результате многочисленных работ, связанных с решением ряда практических задач. Для подробного изучения понятия производной студент может обратиться к теоретическому материалу, содержащемуся в любом учебнике по высшей математике или курсе математического анализа (например [4, 5]). Для практического решения задач достаточно минимальных теоретических знаний, изложенных ниже. Подробные решения всех практических заданий можно найти в [2, 3].

Определение. *Пусть x_0 — точка из области определения функции $f(x)$. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения функции в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ или $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом на математическом языке определение производной можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При решении задач удобно вычислять производную не в конкретной точке, а в произвольной точке x. Процесс нахожения производной называют также дифференцированием. Задания «найти производную функции» и «продифференцировать функцию» — это одно и то же задание — просто по-разному сформулированное. Вычислять (находить) производную следует при помощи таблицы производных, которую в первое время полезно держать перед глазами.

2. Таблица производных

Таблица состоит из трех частей. Первая часть содержит формулы дифференцирования для основных элементарных функций. Вторая часть — правила вычисления производной суммы, произведения и частного двух функций. В третьей части приведена очень важная формула — формула дифференцирования сложной функции. Таблица приводится без вывода, вывод всех формул таблицы можно найти в [5].

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

I. Правила дифференцирования элементарных функций.

1. $(c)' = 0$, где c — любое число;
2. $(x)' = 1$;
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где n — любое число;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$;
5. $(e^x)' = e^x$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$;
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

II. В этой и следующей частях $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции, для которых понятие производной имеет смысл.

16. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
17. $(cf(x))' = cf'(x)$, где c — любое число, $c \neq 0$;
18. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

19. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

III. Формула дифференцирования сложной функции.

20. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

2.1. Примеры применения таблицы производных

Пример 1. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x) = \log_2 x \sin x$.

Нам нужно найти производную от произведения двух функций $\log_2 x$ и $\sin x$ (формула 18):

$$f'(x) = (\log_2 x)' \sin x + \log_2 x(\sin x)'.$$

Теперь найдем производные $(\log_2 x)'$ и $(\sin x)'$ (формулы 6 и 8).

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}; \;\; (\sin x)' = \cos x.$$

Окончательно получаем

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} \sin x + \log_2 x \cos x.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $f(x) = \dfrac{e^x}{\arcsin x}$.

Нам нужно найти производную от частного двух функций e^x и $\arcsin x$ (формула 19):

$$\left(\frac{e^x}{\arcsin x}\right)' = \frac{(e^x)' \arcsin x - e^x (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x}.$$

Найдем производные $(e^x)'$ и $(\arcsin x)'$ (формулы 5 и 12).

$$(e^x)' = e^x; \;\; (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Окончательно получаем

$$f'(x) = \frac{e^x \arcsin x - e^x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = \frac{e^x(\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 1)}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Пример 3. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ для функции $y(x) = 5x^4 + \operatorname{ctg} x$.

Найдем производную от суммы двух функций $5x^4$ и $\operatorname{ctg} x$ (формула 16).

$$(5x^4 + \operatorname{ctg} x)' = (5x^4)' + (\operatorname{ctg} x)'.$$

Найдем производные $(5x^4)'$ и $(\operatorname{ctg} x)'$ (формулы 3, 17 и 11).

$$(5x^4)' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3; \;\; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Все примеры, приведенные выше, содержали функции, зависящие напрямую только от переменной x. Рассмотрим теперь другие более сложные примеры.

Пример 4. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x) = \cos 5x$.

Формулу 9 в этом случае нужно применить не непосредственно, а как правило. Дело в том, что функция $\cos 5x$ является *сложной* — аргумент косинуса здесь не переменная x, а функция $5x$.

Таким образом, для нахождения производной функции $\cos 5x$ нужно применять кроме формулы 9 еще и формулу 20.

Поясним подробно. Смотрим на формулу 9 как на правило — производная от косинуса аргумента равна минус синусу от *того же* аргумента.

В нашем случае аргумент косинуса равен $5x$. Обозначим его за t. Получаем $(\cos t)' = -\sin t$, но $t = 5x$, поэтому необходимо скорректировать результат в соответствии с формулой 20. То есть $(\cos t)' = -\sin t \cdot t'$. Находим производную от аргумента $t' = (5x)' = 5(x)' = 5$. Следовательно, $f'(x) = -\sin t \cdot 5 = -5 \sin t$. Вспоминая, что $t = 5x$, запишем ответ $f'(x) = -5 \sin 5x$.

Еще раз поясним понятие сложной функции — сложной будет всякая функция, аргументом которой является не просто x, а какая-то другая функция. Сложными будут, например, функции $\ln \operatorname{tg} x$, $2^{\sqrt[3]{4x+7}}$, $(3x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$, их аргументами является не x, а новые функции $\operatorname{tg} x$, $\sqrt[3]{4x+7}$, $3x^2 - 4$.

Найдем теперь производые указанных выше функций.

Пример 5. Вычислить производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = \ln \operatorname{tg} x$.

Смотрим на формулу 7 как на правило. Производная от натурального логарифма аргумента равна единице, деленной на *тот же* аргумент.

В нашем случае аргумент логарифма равен $\operatorname{tg} x$. Обозначим его за z. $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, но $z = \operatorname{tg} x$, поэтому необходимо скорректировать результат в соответствии с формулой 20. То есть $(\ln z)' = \dfrac{1}{z} \cdot z'$. Находим производную от аргумента (формула 10) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Следовательно, учитывая, что $z = \operatorname{tg} x$, получим ответ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Пример 6. Найти производную $g'(x)$ функции $g(x) = 2^{\sqrt[3]{4x+7}}$.

Смотрим на формулу 4 как на правило. Производная от показательной функции равна ей самой, умноженной на натуральный логарифм основания показательной функции.

В нашем случае основание показательной функции $a = 2$, аргумент $\sqrt[3]{4x+7}$. Обозначим аргумент $\sqrt[3]{4x+7} = t$. $(2^t)' = 2^t \cdot \ln 2$, но $t = \sqrt[3]{4x+7}$, поэтому необходимо скорректировать результат в соответствии с формулой 20. То есть $(2^t)' = 2^t \cdot \ln 2 \cdot t'$. Теперь необходимо найти производную от аргумента $t = \sqrt[3]{4x+7} = (4x+7)^{\frac{1}{3}}$ — это степенная функция, но не аргумента x, а от функции $4x + 7$, то есть сложная функция.

Смотрим на формулу 3 как на правило. Производная от степенной функции равна произведению показателя степени на степенную функцию *того же* аргумента, с показателем степени на единицу меньшим, чем исходный.

Обозначим $4x + 7 = z$, $(z^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} z^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}$, но так как это сложная функция, то по формуле 20, получим: $(z^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \cdot z'$. Осталось найти $z' = (4x+7)' = (4x)' + (7)' = 4(x)' + 0 = 4$. Последовательно подставляя полученные результаты в исходную формулу, получим окончательный ответ

$$g'(x) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \cdot 4 = \frac{4}{3} \ln 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{4x+7}} (4x+7)^{-\frac{2}{3}}.$$

Пример 7. Продифференцировать функцию $h(x) = (3x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$.

Это степенная функция, но не аргумента x, а сложного аргумента $3x^2 - 4$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Смотрим на формулу 3 как на правило. Производная от степенной функции равна произведению показателя степени на степенную функцию *того же* аргумента, с показателем степени на единицу меньшим, чем прежний.

Обозначим $3x^2-4=u$, $\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$; $u=3x^2-4$. Найдем теперь производную от аргумента $(3x^2-4)'=(3x^2)'-(4)'=3\cdot 2x=6x$ (формулы 16, 17, 3, 1). Перемножая результаты в соответствии с формулой 20, вспоминая, что $u=3x^2-4$, получаем искомую производную

$$h'(x)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x=3u^{-\frac{1}{2}}x=3(3x^2-4)^{-\frac{1}{2}}x.$$

Рассмотрим еще несколько примеров, комментируя действия менее подробно.

Пример 8. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций.

а) $y=8\sqrt[3]{3x+11}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^4+1}}$;

б) $y=\sqrt[7]{\ln^4 9x}$;

в) $y=\log_3\sqrt[3]{\dfrac{9}{e^{3x}-e^{-3x}}}$;

г) $y=(e^{\sin x}-1)^3$.

а) $y=8\sqrt[3]{3x+11}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^4+1}}=8(3x+11)^{\frac{1}{3}}+5(x^4+1)^{-\frac{1}{4}}$. Таким образом, исходная функция — это сумма двух степенных функций со сложными аргументами $3x+11$ и x^4+1. Обозначим $u=3x+11$ $v=x^4+1$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=(8u^{\frac{1}{3}}+5v^{-\frac{1}{4}})'=8(u^{\frac{1}{3}})'+5(v^{-\frac{1}{4}})'=$$

$$=8\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}+5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)v^{-\frac{1}{4}-1}=\frac{8}{3}u^{-\frac{2}{3}}-\frac{5}{4}v^{-\frac{5}{4}}.$$

Здесь мы воспользовались формулами 16, 17 и 3. В соответствии с формулой 20, так как исходная функция сложная, мы должны скорректировать результат и записать:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot u'-\frac{5}{4}v^{-\frac{5}{4}}\cdot v'.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Найдем производные аргументов $u' = (3x+11)' = 3(x)' + (11)' = 3$ (формулы 16, 17, 2, 1). $v' = (x^4+1)' = (x^4)' + (1)' = 4x^3$ (формулы 16, 3, 1). Подставляя полученные результаты и выражения для u и v в производную, получаем ответ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}(3x+11)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 - \frac{5}{4}(x^4+1)^{-\frac{5}{4}} \cdot 4x^3 = 8(3x+11)^{-\frac{2}{3}} - 5(x^4+1)^{-\frac{5}{4}} x^3.$$

б) $y = \sqrt[7]{\ln^4 9x} = (\ln 9x)^{\frac{4}{7}}$ — это степенная функция от сложного аргумента $\ln 9x$. Обозначим $\ln 9x = t$, тогда $y = t^{\frac{4}{7}}$, найдем производную в соответствии с формулами 20 и 3.

$$\frac{dy}{dx} = \left(t^{\frac{4}{7}}\right)' = \left(\frac{4}{7} \cdot t^{\frac{4}{7}-1}\right) \cdot t' = \frac{4}{7} t^{-\frac{3}{7}} \cdot t'.$$

Теперь найдем производную аргумента $t = \ln 9x$. Это логарифмическая функция от сложного аргумента $9x$. Обозначая $9x = z$, получим

$$t' = (\ln z)' = \frac{z'}{z} = \frac{(9x)'}{9x} = \frac{9}{9x} = \frac{1}{x}.$$

Мы воспользовались формулами 20, 7, 17 и 2. Подставляя результат в выражение для производной, получаем окончательный ответ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{7}(\ln 9x)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{7x} \ln^{-\frac{3}{7}} 9x.$$

в) $y = \log_3 \sqrt[3]{\dfrac{9}{e^{3x} - e^{-3x}}} = \log_3 \left(\dfrac{9}{e^{3x} - e^{-3x}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \log_3 \dfrac{9}{e^{3x} - e^{-3x}} = \dfrac{1}{3}\left(\log_3 9 - \log_3(e^{3x} - e^{-3x})\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\log_3(e^{3x} - e^{-3x})$. В этих преобразованиях мы воспользовались свойствами логарифмов, найти которые можно в любом школьном учебнике, например в [1]. В результате исходная функция представилась в виде разности двух функций, одна из которых константа $\dfrac{2}{3}$, а другая — логарифмическая функция от сложного аргумента $e^{3x} - e^{-3x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_3(e^{3x} - e^{-3x})\right)' = \left(\frac{2}{3}\right)' - \frac{1}{3}\left(\log_3(e^{3x} - e^{-3x})\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\log_3(e^{3x} - e^{-3x})\right)'.$$

При этих преобразованиях мы воспользовались формулами 16, 17 и 1.

Обозначим $e^{3x} - e^{-3x} = t$, тогда по формулам 6 и 20 получаем

$$\big(\log_3(e^{3x} - e^{-3x})\big)' = (\log_3 t)' = \frac{t'}{t\ln 3}.$$

Вычислим t':

$$t' = (e^{3x} - e^{-3x})' = (e^u)' - (e^v)' = e^u \cdot u' - e^v \cdot v'.$$

Здесь $u = 3x$, $v = -3x$ и $u' = 3$, $v' = -3$. Мы воспользовались формулами 20, 16, 5, 17 и 2.

Итак, последовательно подставляя полученые результаты, находим ответ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\big(\log_3(e^{3x} - e^{-3x})\big)' = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t'}{t\ln 3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^u \cdot u' - e^v \cdot v'}{(e^{3x} - e^{-3x})\ln 3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x}\cdot 3 + e^{-3x}\cdot 3}{(e^{3x} - e^{-3x})\ln 3} = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{e^{-3x} - e^{3x}}\cdot\frac{1}{\ln 3}.$$

г) $y = (e^{\sin x} - 1)^3$ — это степенная функция от сложного аргумента $e^{\sin x} - 1$. Обозначим $e^{\sin x} - 1 = t$, тогда в соответствии с формулами 3 и 20:

$$\frac{dy}{dx} = \big((e^{\sin x} - 1)^3\big)' = \big(t^3\big)' = 3t^2 \cdot t'.$$

Теперь найдем производную аргумента $t' = (e^{\sin x} - 1)' = (e^{\sin x})'$. Функция $e^{\sin x}$ — это показательная функция от аргумента $\sin x$, поэтому, обозначая $\sin x = z$, опять действуем по формуле 20, а также по формуле 5:

$$(e^{\sin x})' = (e^z)' = e^z \cdot z' = e^{\sin x}\cdot(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

Таким образом получаем ответ:

$$\frac{dy}{dx} = 3(e^{\sin x} - 1)^2 e^{\sin x}\cos x.$$

3. Наименьшее и наибольшее значения функции

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение из всех, которые функция принимает на отрезке или на всей области определения.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Если подобную задачу необходимо решить на отрезке, то рассматривая график произвольной непрерывной функции, можно убедиться, что наибольшее или наименьшее значение функции следует искать среди значений в концевых точках, или в точках экстремума — то есть в точках максимума и минимума (см. рис. 1).

Таким образом для нахождения на некотором отрезке $[a,\, b]$ наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ нужно:
1) найти значения функции на концах отрезка, то есть числа $f(a)$ и $f(b)$;
2) найти значения в точках экстремума, принадлежащих интервалу $(a,\, b)$;
3) из найденных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

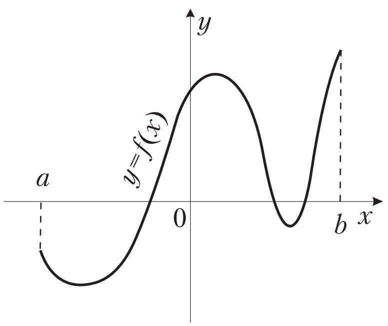


Рис. 1.

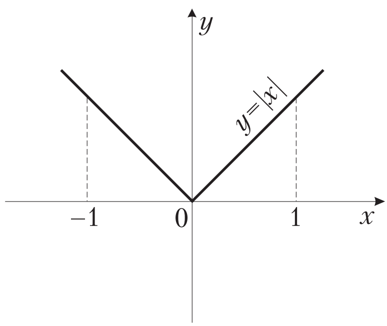


Рис. 2.

Замечание 1. *Иногда наименьшее (или наибольшее) значение функции достигается в точке x_0, в которой производная $f'(x)$ не существует. Например, наименьшее значение функции $y = |x|$ (см. рис. 2) на отрезке $[-1,\, 1]$ достигается в точке $x_0 = 0$, однако $y'(0)$ не существует.*

Замечание 2. *Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то функция $f(x)$ и функция $(f(x))^n$, где n — положительное число, принимают наибольшее (или наименьшее) значения в одной точке.*

Пример 9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке $[-2,\, 1]$.

Найдем производную функции $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. Точки «подозрительные на экстремум» находим из уравнения

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2.$$

Ни одна из найденных точек не принадлежит промежутку $(-2,\, 1)$. Найдем значения в концевых точках отрезка $f(-2) = 68$, $f(1) = -31$.

Это означает, что наименьшее значение функции $f(x)$ на $[-2,\, 1]$ — это $f(1) = -31$, а наибольшее — $f(-2) = 68$.

Пример 10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $\left[-2,\, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Найдем производную $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Тогда точки «подозрительные на экстремум» находятся из уравнения:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

Отрезку $\left[-2,\, -\dfrac{1}{2}\right]$ принадлежит только одна из полученных точек $x_2 = -1$. Найдем значение функции в ней: $f(-1) = -2$.

Теперь найдем значения в концевых точках: $f(-2) = -2\dfrac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\dfrac{1}{2}$. Среди полученных чисел -2 и $-2\dfrac{1}{2}$ выбираем наименьшее и наибольшее. Наименьшее значение функции $f(x)$ на $\left[-2,\, -\dfrac{1}{2}\right]$ достигается в концах отрезка $f(-2) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\dfrac{1}{2}$, а наибольшее — в точке экстремума $f(-1) = -2$.

Пример 11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 2\sin x + 2\cos 2x$ на отрезке $[0,\, 2\pi]$.

Найдем производную $f'(x) = 2\cos x - 2\sin x$. Тогда точки «подозрительные на экстремум» находятся из уравнения:

$$2\cos x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Среди чисел вида $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$ только $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{5\pi}{4}$ принадлежат отрезку $[0,\, 2\pi]$. Найдем значения функции в этих точках:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{4} + 2\cos\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Найдем значения в концевых точках $f(0) = 2\sin 0 + 2\cos 0 = 0 + 2 = 2$, $f(2\pi) = 2\sin 2\pi + 2\cos 2\pi = 0 + 2 = 2$. Среди чисел $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, 2 выбираем наименьшее и наибольшее.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на $[0,\, 2\pi]$ достигается в точке $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$, а наибольшее — в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

Пример 12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3,\, 2]$.

Найдем производную $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Решим уравнение

$$4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$$

Значения в точках «подозрительных на экстремум» $f(0) = 5$, $f(-2) = -11$, $f(2) = -11$. Значения в концах промежутка $f(-3) = 14$, $f(2) = -11$.

Таким образом наименьшее значение функции $f(x)$ на $[-3,\, 2]$ достигается в точках $x = \pm 2$ и равно -11, а наибольшее значение — в точке $x = -3$ и равно 14.

Пример 13. Из квадратного листа картона со стороной a необходимо изготовить открытую сверху квадратную коробку, вырезав по углам квадраты и загнув образовавшиеся края. Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

Пусть x — сторона вырезаемого квадрата. Ясно, что x может изменяться от 0 до $\dfrac{a}{2}$, то есть $x \in \left[0,\, \dfrac{a}{2}\right]$. Пусть V — объем коробки. Число V зависит от того, каким взят x. Обозначим это так: $V = V(x)$. Найдем аналитическое выражение функции $V = V(x)$, используя формулу для вычисления объема параллелепипеда. ($V = mnp$, где m, n, p — длины ребер этого параллелепипеда.) В нашем случае длины ребер $a - 2x$, $a - 2x$ и x соответственно (см. рис. 3), значит $V(x) = (a - 2x)(a - 2x)x = (a - 2x)^2 x$.

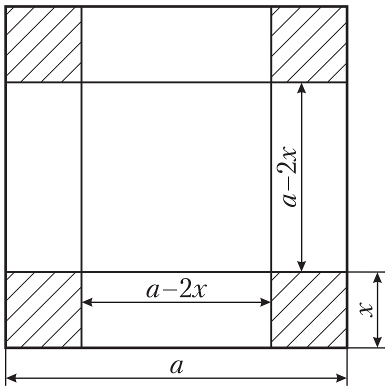


Рис. 3.

Таким образом наша задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $V(x) = (a-2x)^2 x$ на отрезке $\left[0,\, \dfrac{a}{2}\right]$.

Исследуем эту функцию на отрезке $\left[0,\, \dfrac{a}{2}\right]$.

$$V'(x) = 2(a-2x)(-2)x + (a-2x)^2 \cdot 1 = (a-2x)(a-6x).$$

Решим уравнение $V'(x) = 0 \Leftrightarrow (a-2x)(a-6x) = 0$. Откуда $x = \dfrac{a}{2}$ или $x = \dfrac{a}{6}$.

Точка $x = \dfrac{a}{2}$ совпадает с концом отрезка, а $x = \dfrac{a}{6}$ — точка экстремума, лежащая внутри отрезка $\left[0,\, \dfrac{a}{2}\right]$. Вычислим значения функции в концах и экстремуме: $V(0) = 0$, $V\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$, $V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \left(a - \dfrac{a}{3}\right)\dfrac{a}{6} = \dfrac{2a^3}{27}$.

Очевидно, что концы отрезка не удовлетворяют условию задачи, а точка $x = \dfrac{a}{6}$ является искомой точкой максимума функции $V(x)$.

Итак, высота коробки должна быть равна $\dfrac{a}{6}$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

4. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

При построении графиков функций можно придерживаться схемы приведенной ниже. (Схема сопровождается минимальными теоретическими сведениями.)

I. Область определения функции $y = f(x)$.

II. Четность или нечетность функции. Периодичность функции.

Определение. *Говорят, что функция $y = f(x)$ четная, если для всех x из области определения число $-x$ также принадлежит области определения и выполнено равенство $f(-x) = f(x)$.*

Замечание 3. *График четной функции всегда симметричен относительно оси OY.*

Определение. *Говорят, что функция $y = f(x)$ нечетная, если для всех x из области определения число $-x$ также принадлежит области определения и выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$.*

Замечание 4. *График нечетной функции всегда симметричен относительно начала координат — точки $O(0, 0)$.*

Замечание 5. *Произвольная функция $y = f(x)$ не обязательно является четной или нечетной, такую функцию называют функцией общего вида.*

Определение. *Число T называется периодом функции $y = f(x)$, если для любого x из области определения числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполнено равенство $f(x+T) = f(x - T) = f(x)$. Функция $f(x)$ в этом случае называется периодической.*

Замечание 6. *Среди элементарных функций периодическими являются только тригонометрические функции. Поэтому не следует искать период у функций, не содержащих в себе тригонометрические функции. График периодической функции с периодом T, можно построить на отрезке длины T, после чего повторить изображение на всей области определения.*

III. Промежутки знакопостоянства. Нули функции.

Требуется указать те x, для которых функция принимает положительные значения, и те, для которых она принимает отрицательные значения. Как правило, это можно сделать при помощи метода интервалов, решив неравенства $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$. Нули функции — это точки x, для которых $f(x) = 0$. (То есть точки, в которых график функции пересекает ось OX.)

IV. Точки экстремума функции. Промежутки монотонности.

Точки, «подозрительные на экстремум», могут быть найдены из уравнения $f'(x) = 0$. После чего нужно проследить за изменением знака производной $f'(x)$ при переходе через каждую из точек «подозрительных на экстремум». Если при переходе через такую точку производная меняет знак с «$+$» на «$-$», то это точка максимума. Если производная меняет знак с «$-$» на «$+$», то это точка минимума. Если производная при переходе через точку знака не меняет, то эта точка не является точкой экстремума.

Зная промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$, можно делать выводы о монотонности функции $f(x)$.

Если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает.

Если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

Замечание 7. *Точки, в которых производная $f'(x)$ не существует, а сама функция определена, являются «подозрительными на экстремум».*

V. Точки перегиба функции. Характер выпуклости функции.

Точки, «подозрительные на перегиб», могут быть найдены из уравнения $f''(x) = 0$. Если при этом вторая производная меняет знак, то это точка перегиба, если знак не меняется, то точка не является точкой перегиба.

Промежутки знакопостоянства второй производной $f''(x)$ позволяют сделать выводы о характере выпуклости функции $f(x)$.

Если $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

Если $f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх.

Замечание 8. *Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, а сама функция определена, являются «подозрительными на перегиб».*

VI. Асимптоты функции.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Замечание 9. *Если функция $y = f(x)$ есть дробь, то вертикальные асимптоты — это прямые $x = a_i$, где a_i — корни знаменателя.*

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой при $x \to \pm\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая величина при $x \to \pm\infty$. Для произвольной функции $y = f(x)$, числа k и b находят по следующим формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx].$$

Замечание 10. *Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при $k = 0$.*

Замечание 11. *У функции может совсем не быть асимптот.*

VII. Контрольные точки.

Иногда, кроме полученых выше характеристических точек функции, используют еще и дополнительные контрольные точки. Вычисляют для удобных значений x_0 значение функции $y_0 = f(x_0)$.

Пример 14. Построить график функции $y(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

I. Область определения функции.

Данная функция определена для всех x, для которых знаменатель дроби $\dfrac{x^3}{3 - x^2}$ отличен от 0, то есть $3 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$. Итак, область определения данной функции — любое число $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Внимание! $x = \pm\sqrt{3}$ — вертикальные асимптоты графика функции (см. замечание 9).

II. Четность или нечетность функции. Периодичность.

Заменим в формуле $y(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ число x на $-x$:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{3 - x^2} = -\frac{x^3}{3 - x^2} = -y(x).$$

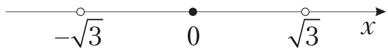
Следовательно, данная функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат.

Данная функция не является периодической, так как не содержит тригонометрических функций.

III. Промежутки знакопостоянства. Нули функции.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Решим неравенства $\dfrac{x^3}{3-x^2} \leqslant 0$ методом интервалов. Для этого найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую ось.



В полученных интервалах выберем по точке и посчитаем значение данной функции в этих точках. Нас прежде всего интересует не точное значение функции, а знак функции в выбранной точке:

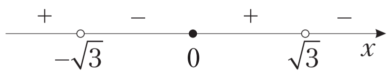
$$y(2) = \frac{2^3}{3-2^2} < 0 \quad (\text{знак «}-\text{»}),$$

$$y(1) = \frac{1^3}{3-1^2} > 0 \quad (\text{знак «}+\text{»}),$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^3}{3-(-1)^2} < 0 \quad (\text{знак «}-\text{»}),$$

$$y(-2) = \frac{(-2)^3}{3-(-2)^2} > 0 \quad (\text{знак «}+\text{»}).$$

Полученный знак ставим над интервалом, из которого выбрана точка.



Считываем информацию с рисунка:
$y(x) > 0$ при $x < -\sqrt{3}$ и $0 < x < \sqrt{3}$;
$y(x) < 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0$ и $x > \sqrt{3}$;
$y(x) = 0$ при $x = 0$ (нуль функции).
График пересекает ось абсцисс в точке $(0, 0)$.
IV. Точки экстремума функции. Промежутки монотонности.
Найдем производную данной функции.

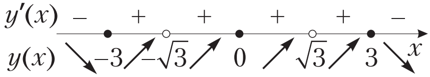
$$y'(x) = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2}.$$

Найдем точки, «подозрительные на экстремум», решив уравнение $y'(x) = 0$.

$$9x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(9-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 3.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Для определения промежутков знакопостоянства производной методом интервалов решим неравенства $\dfrac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2} \leqslant 0$. Нанесем корни числителя и знаменателя данной дроби на ось. В каждом интервале выберем по точке и расставим знаки «+» и «−», как и в предыдущем пункте. Проделайте это самостоятельно и сверьте результат с рисунком.



Считываем информацию с рисунка.

$y'(x) > 0$ при $-3 < x < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < 3$. Значит, на этих промежутках функция возрастает (на рисунке эти интервалы помечены стрелкой вверх).

$y'(x) < 0$ при $x < -3$ и $x > 3$. Значит на этих промежутках функция убывает (на рисунке эти интервалы помечены стрелкой вниз).

Производная $y'(x)$ обращается в нуль в трех точках 0, 3, −3. При переходе через точку −3 производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, точка −3 — точка минимума. При переходе через точку 3 производная меняет знак с «+» на «−», следовательно, точка −3 — точка максимума. При переходе через точку 0 производная знака не меняет, следовательно, точка 0 не является точкой экстремума.

Найдем значения в точках экстремума:

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3 - (-3)^2} = \frac{9}{2}, \quad y(3) = \frac{3^3}{3 - 3^2} = -\frac{9}{2}.$$

V. Точки перегиба функции. Характер выпуклости.

Найдем вторую производную данной функции.

$$y''(x) = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 - (9x^2 - x^4) \cdot 2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} =$$

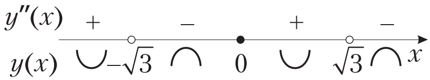
$$= \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2) + 4x(9x^2 - x^4)}{(3 - x^2)^3} = \frac{6x^3 + 54x}{(3 - x^2)^3} = \frac{6x(x^2 + 9)}{(3 - x^2)^3}.$$

Точки, «подозрительные на перегиб», являются корнями уравнения $y''(x) = 0$.

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x(x^2 + 9)}{(3 - x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Для нахождения промежутков знакопостоянства второй производной нужно решить неравенства $\dfrac{x(x^2+9)}{(3-x^2)^3} \lesseqgtr 0$. Решим их методом интервалов. Результат нанесем на рисунок.



Считываем информацию с рисунка.

$y''(x) < 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0$ и $x > \sqrt{3}$. Значит, на этих промежутках функция выпукла вверх.

$y''(x) > 0$ при $x < -\sqrt{3}$ и $0 < x < \sqrt{3}$. Значит, на этих промежутках функция выпукла вниз.

Производная $y''(x)$ обращается в нуль в одной точке $x = 0$ и меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через эту точку. Следовательно, точка 0 — точка перегиба функции.

При переходе через точки $\pm\sqrt{3}$ вторая производная меняет знак с «$+$» на «$-$», но в этих точках функция не определена. Такие точки, естественно, не являются точками перегиба.

Найдем значение функции в точке перегиба $y(0) = 0$.

VI. Асимптоты функции.

Вертикальные асимптоты графика функции $y(x)$ мы нашли в пункте I, ими являются прямые $x = \pm\sqrt{3}$.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$ данной функции:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(3-x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{3-x^2} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x}{3-x^2}\right] = 0.$$

Замечание 12. *В данном случае* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{3-x^2} = -1$, *так как* $(-x)^2 = x^2$, *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{3-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{3-x^2} = 0$, *следовательно, функция имеет одну и ту же асимптоту на* $+\infty$ *и* $-\infty$.

В том, что данные пределы найдены верно, можно убедиться, применив правило Лопиталя.

Следовательно, наклонной асимптотой графика является прямая $y = -x$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

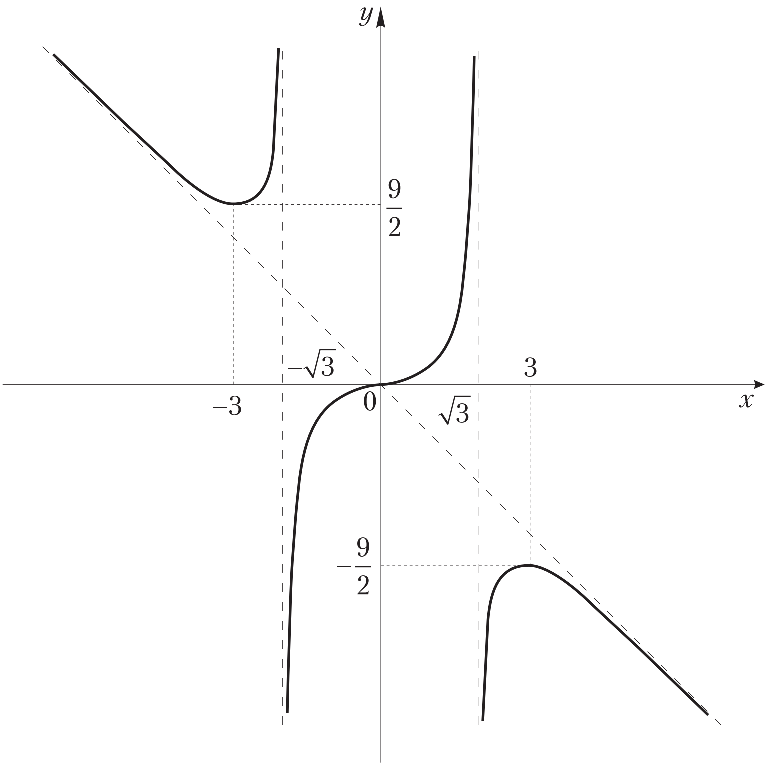


Рис. 4.

VII. Контрольные точки.

Вычислим для контроля значение функции в точках $x = \pm 1$:

$$y(1) = \frac{1^3}{3 - 1^2} = \frac{1}{2},\ \ y(-1) = \frac{(-1)^3}{3 - (-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

По полученным данным построим график функции (см. рис. 4).

Внимание! Информация, полученная при исследовании, должна согласовываться с рисунком.

Пример 15. Построить график функции $y(x) = e^{-x^2}$.

I. Область определения функции.

Область определения данной функции: x — любое вещественное число.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

II. Четность или нечетность функции. Периодичность.

$$y(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = y(x).$$

Данная функция является четной, и ее график симметричен относительно оси Oy.

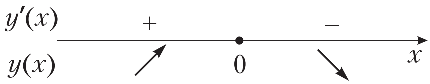
Данная функция не является периодической.

III. Промежутки знакопостоянства. Нули функции.

По свойствам показательной функции, для всех значений x имеет место неравенство $e^{-x^2} > 0$. То есть $e^{-x^2} \neq 0$, график функции расположен выше оси Ox и не пересекает ее. (Функция принимает только положительные значения.)

IV. Точки экстремума функции. Промежутки монотонности.

Находим производную $y'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, точки, подозрительные на экстремум $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



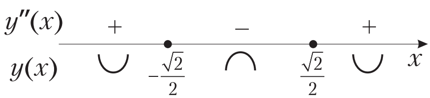
Функция убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$. Точка $x = 0$ — точка максимума. (Знак производной изменяется с «+» на «−».) Значение в точке максимума $y(0) = 1$.

V. Точки перегиба функции. Характер выпуклости.

Найдем вторую производную

$$y''(x) = -2 \cdot (xe^{-x^2})' = -2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Точки перегиба должны удовлетворять уравнению $y''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Функция выпукла вверх при $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Функция выпукла вниз при $x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Точки $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — точки перегиба функции (знак второй производной меняется), и значения в указанных точках равны $y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = y\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

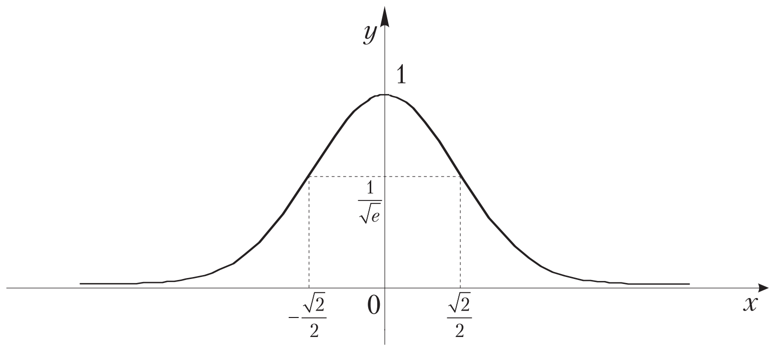


Рис. 5.

VI. Асимптоты функции.

Вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[e^{-x^2} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

VII. Контрольные точки.

Вычислим для контроля значения функции в точках $x = \pm 1$ — $y(1) = y(-1) = e^{-(\pm 1)^2} = e^{-1}$.

Построим график функции (см. рис. 5).

Рассмотрим еще один пример, комментируя его менее подробно.

Пример 16. Построить график фукнции $y(x) = \ln\sin x$.

I. Область определения функции.

Под знаком логарифма может стоять только положительная величина $\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. То есть область определения данной функции — интервалы длины π: $\ldots$, $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi), \ldots$.

В концах этих интервалов синус принимает значение равное 0, $\ln 0$ — не определен. Следовательно, у функции будут вертикальные асимптоты при $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

II. Четность или нечетность функции. Периодичность.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

$y(-x) = \ln\sin(-x) = \ln(-\sin x)$, то есть из точек x и $-x$ только одна лежит в области определения. Функция не является четной или нечетной, то есть это функция общего вида.

$y(x \pm 2\pi) = \ln\sin(x \pm 2\pi) = \ln\sin x = y(x)$. Функция является периодической с периодом 2π.

График данной функции можно построить на интервале длины 2π, после чего «размножить» на всю область определения.

III. Промежутки знакопостоянства. Нули функции.

$y(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

$y(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x > 1$, таких x не существует.

$y(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\sin x < 0 \Leftrightarrow \sin x < 1 \Leftrightarrow 0 < \sin x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(2\pi k,\, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

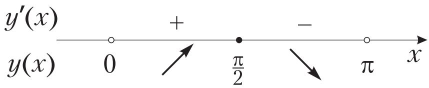
IV. Точки экстремума функции. Промежутки монотонности.

$y' = \operatorname{ctg} x$, таким образом, $y'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ — точки «подозрительные на эктремум».

Найдем промежутки монотонности.

$y'(x) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(2\pi k,\, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ — на этих промежутках функция возрастает.

$y'(x) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ — на этих промежутках функция убывает.



Точки $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — точки максимума функции.

$$y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \ln 1 = 0.$$

Внимание! При указании промежутков монотонности и экстремумов мы учли область определения функции.

V. Точки перегиба функции. Характер выпуклости.

$y''(x) = (y'(x))' = (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Таким образом $y''(x) < 0$ для всех значений x из области определения — функция выпукла вверх. Точек перегиба нет.

VI. Асимптоты функции.

Вертикальные асимптоты мы нашли в пункте I. Найдем наклонные.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

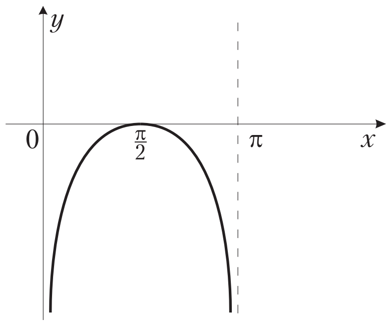


Рис. 6.

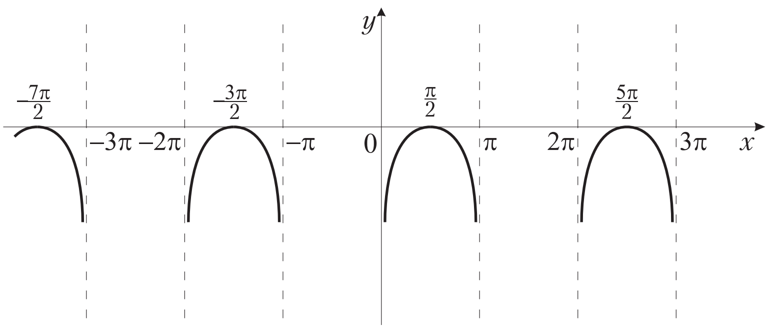


Рис. 7.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\ln\sin x}{x}$ — данный предел не существует, так как не существует $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$. Наклонных асимптот нет.

VII. Контрольные точки.

Без таблиц трудно находить значения данной функции в произвольной точке. Читатель сам может попробовать сделать это с помощью калькулятора. Опустим данные вычисления.

Строим график на интервале $(0,\, 2\pi)$, учитывая область определения только на интервале $(0,\, \pi)$ (см. рис. 6).

Теперь повторим полученную картинку на каждом интервале области определения (см. рис. 7).

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Здесь мы рассмотрим только случай функций от двух независимых переменных.

Определение. *Функцией двух независимых переменных x и y называется соответствие (правило), по которому каждой паре чисел (x, y) сопоставляется единственное число z. При этом пишут $z = z(x, y)$, $z = f(x, y)$.*

Пример 17. Пусть x — длина прямоугольника, y — его ширина. Тогда площадь этого прямоугольника $z = xy$ — функция двух независимых переменных.

Пример 18. Пусть x — количество студентов, сдавших экзамен по матеметике, а y — количество студентов той же группы, не сдавших экзамен. Тогда число студентов в этой группе $z = x + y$ — функция двух независимых переменных.

График функции $z = z(x, y)$ всегда есть некоторая поверхность в пространстве (см. рис. 8).

Определение. *Областью определения функции $z = z(x, y)$ называется такая область D на плоскости Oxy, что выражение $z(x, y)$ имеет смысл для всех точек (x, y) из области D.*

Пример 19. Найти область определения функции $z = \log_2(1-x^2-y^2)$.

Логарифм определен только для положительных значений аргумента, следовательно, $1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$. На плоскости уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружность с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом 1. Учитывая знак неравенства, можем сделать вывод, что областью определения данной функции является внутренность круга радиуса 1 без границы (см. рис. 9).

Перейдем теперь к определению производной функции двух независимых переменных.

В определении производной функции одной переменной участвуют аргумент и его приращение. В функции двух переменных два независимых аргумента x и y, следовательно, можно ввести определение производной по каждому из них. Такие производные называются частными.

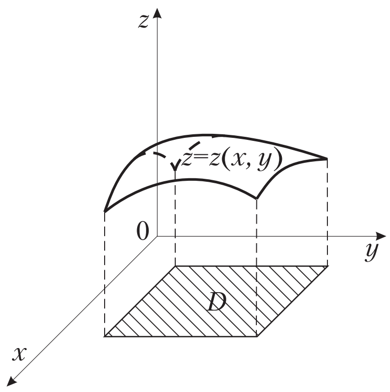


Рис. 8.

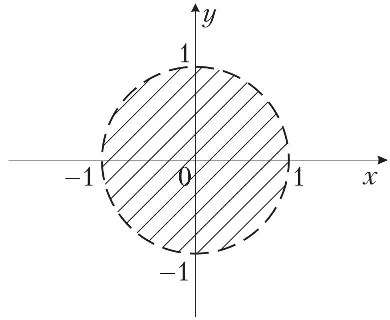


Рис. 9.

Определение. *Пусть $z = z(x, y)$ — функция двух независимых переменных и точка $M_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка области определения функции $z = z(x, y)$. Частной производной в точке M_0 функции $z(x, y)$ по переменной x называется предел частного приращения функции по аргументу x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Частная производная по переменной x функции $z = z(x, y)$ в точке M_0 обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$. Таким образом:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Выражение $z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)$ — есть частное приращение функции по аргументу x.

Аналогично определяется частная производная в точке M_0 функции $z = z(x, y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Если необходимо найти частные производные функции в произвольной точке, то обозначение точки опускают и пишут $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Замечание 13. *Частную производную по x (или по y) мы вычисляем, допуская, что другая переменная фиксирована (то есть не изменяется).*

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Для успешного вычисления частных производных необходимо владеть техникой дифференцирования функций одной переменной.

Пример 20. Дана функция $z = x^3y^3 + 9x - 4y + 8$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$, где $M_0(1, -1)$.

Найдем частную производную по переменной x в произвольной точке (x, y). В этом случае переменная y — фиксирована. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 + 9$. Вычислим теперь значение этой производной в точке M_0. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 3x^2y^3 + 9\Big|_{M_0} = 3 \cdot 1^2(-1)^3 + 9 = 6$.

Найдем частную производную по переменной y в произвольной точке (x, y). В этом случае переменная x — фиксирована $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 4$. Вычислим теперь значение этой производной в точке M_0. $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 3x^3y^2 - 4\Big|_{M_0} = 3 \cdot 1^3 \cdot (-1)^2 - 4 = -1$.

В этом примере при вычислении частной производной по переменной x в произвольной точке мы получили новую функцию от двух независимых переменных $3x^2y^3+9$. Эту функцию можно снова дифференцировать по переменной x или по переменной y. Значит, исходную функцию мы дифференцируем дважды и, соответственно, получаем вторые частные производные.

Если исходную функцию мы дифференцируем дважды по x, то получим вторую производную по x, которую обозначают $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, полагая $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

В нашем примере $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y^3 + 9) = 6xy^3$.

Аналогично $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^3y^2 - 4) = 6x^3y$.

Как и для первых производных, для вторых может быть вычислено значение в точке, например, в точке M_0.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = 6xy^3\Big|_{M_0} = 6 \cdot 1 \cdot (-1)^3 = -6.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = 6x^3y\Big|_{M_0} = 6 \cdot 1^2 \cdot (-1) = -6.$$

Если частную производную по x дифференцируют по y, то говорят о второй смешанной производной, которую обозначают $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, полагая $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

В нашем примере $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^3 + 9\right) = 9x^2y^2$.

Смешанная производная может быть получена и другим образом, если производную по y дифференцировать по x.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3y^2 - 4\right) = 9x^2y^2$$

Мы получили один и тот же результат. Это связано с тем, что смешанные производные равны и не зависят от порядка дифференцирования $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9xy^2$.

Вычислим значение смешанной производной в точке M_0.
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = 9x^2y^2\Big|_{M_0} = 9 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 = 9$.

Пример 21. Дана функция $z = x^y$. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = [y - \text{константа}] = yx^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = [x - \text{константа}] = x^y \ln x$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}\right) = [x - \text{константа}] = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = [y - \text{константа}] = yx^{y-1}\ln x + x^y\dfrac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$.

Смешанные производные снова совпадают.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(yx^{y-1}\right) = [y - \text{константа}] = y(y-1)x^{y-2}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = [x - \text{константа}] = x^y \cdot \ln^2 x$.

Пример 22. Дана функция $z = \ln(y + e^x)$. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = [y - \text{константа}] = \dfrac{e^x}{y+e^x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = [x - \text{константа}] = \dfrac{1}{y+e^x}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^x}{y+e^x}\right) = [y - \text{константа}] = \dfrac{e^x(y+e^x) - e^x \cdot e^x}{(y+e^x)^2} =$

$\dfrac{e^x(y+e^x-e^x)}{(y+e^x)^2} = \dfrac{ye^x}{(y+e^x)^2}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y+e^x}\right) = [x - \text{константа}] = -\dfrac{1}{(y+e^x)^2}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{e^x}{y+e^x}\right) = [x - \text{константа}] = -\dfrac{e^x}{(y+e^x)^2}$.

Найдите самостоятельно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, результат должен совпасть с последним полученным ответом.

Пример 23. Дана функция $z = \sin\dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos\dfrac{x}{y} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{y}\left(-\sin\dfrac{x}{y}\right)\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + \cos\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{-2x}{y^3}\right) = -\dfrac{x^2}{y^4}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{2x}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{1}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y}\left(-\sin\dfrac{x}{y}\right)\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) =$

$-\dfrac{1}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y^3}\sin\dfrac{x}{y}$.

Найдите теперь самостоятельно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, результат должен совпасть с последним полученным ответом.

Пример 24. Дана функция $z = z(x, y)$. Показать, что

$$F\left(x,\, y,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x},\, \frac{\partial z}{\partial y},\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \equiv 0.$$

а) $z = \dfrac{x}{y^2}$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

В данной задаче необходимо вычислить лишь те частные производные, которые входят в выражение F и произведя указанные действия, показать, что $F \equiv 0$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y^3}.$$

Подставим полученные результаты в выражение для F.

$$F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{y^3} - \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{2x}{y^3}\right) = -\frac{2}{y^3} + \frac{2}{y^3} = 0.$$

б) $z = \ln(x^2 - y^2)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

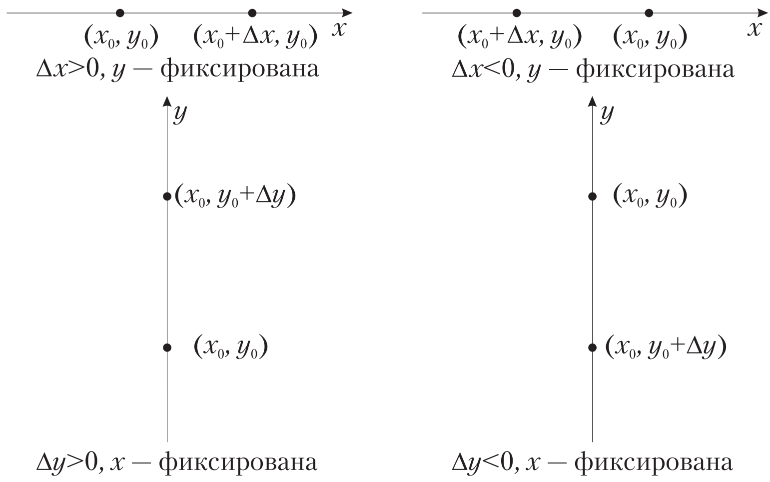
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Подставим полученные результаты в выражение для F.

$$F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = 0.$$

Вернемся на время к определению производной функции по одной переменной. При определении производной мы отступали от фиксированной точки x_0 в любую сторону на величину Δx — приращение аргумента. Точно так же мы поступали при определении частной производной по x (или по y) для функции двух независимых переменных.



НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

То есть снова определили производную от функции одной переменной (так как другая переменная фиксирована), задали приращение только по *одной* из переменных. Каким же образом может быть введено понятие производной, характерное именно для функции двух независимых переменных? Очевидно, надо от исходной точки $M_0(x_0, y_0)$ перейти к новой точке $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, изменив одновременно обе переменных, x, и y, задав не одно, а два приращения Δx и Δy.

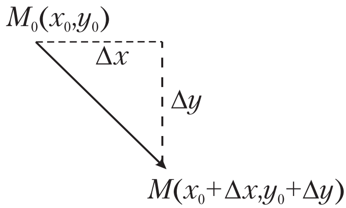


Рис. 10.

Такое двойное приращение удобно задать при помощи вектора с координатами Δx и Δy. $\overrightarrow{M_0M} = (\Delta x, \Delta y)$ (см. рис. 10). Таким образом, мы пришли к понятию производной функции двух переменных в направлении вектора (или производной по направлению).

Определение. *Производной функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\overrightarrow{l}$ называется*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{z(M) - z(M_0)}{M_0M}, \text{ где } M_0M = \begin{cases} |\overrightarrow{M_0M}|, \text{ если } \overrightarrow{M_0M} \upuparrows \overrightarrow{l}, \\ -|\overrightarrow{M_0M}|, \text{ если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \overrightarrow{l}. \end{cases}$$

Обозначают такую производную $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M_0)$.

Для вычисления производной по направлению $\overrightarrow{l}$ функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ нам понадобится понятие градиента. Дадим его определение.

Определение. *Градиентом функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор* $\operatorname{grad} z(M_0) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0), \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)\right)$.

Если требуется вычислить градиент в произвольной точке $M(x, y)$, то обозначение M_0 опускают: $\operatorname{grad} z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Пример 25. Дана функция $z = 3x^4y^2 - 7xy^3$. Найти градиент функции $z = z(x,\, y)$ в произвольной точке и точке $M_0(0,\, -1)$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3y^2 - 7y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4y - 21xy^2.$$

Градиент — это вектор, координаты которого есть частные производные по переменным x и y.

$$\operatorname{grad} z = (12x^3y^2 - 7y^3,\, 6x^4y - 21xy^2).$$

Найдем градиент функции $z = z(x,\, y)$ в точке $M_0(0,\, -1)$.
$\operatorname{grad} z(M_0) = (12x^3y^2 - 7y^3\Big|_{M_0},\, 6x^4y - 21xy^2\Big|_{M_0}) = (12 \cdot 0^3 \cdot (-1)^2) - 7 \cdot (-1)^3,\, 6 \cdot 0^4 \cdot (-1) - 21 \cdot 0 \cdot (-1)^2) = (7,\, 0)$.

Замечание 14. *Функция $z = z(x,\, y)$ возрастает быстрее всего в направлении вектора* $\operatorname{grad} z$. *Пояснение этого факта можно найти в любом учебнике по высшей математике, например в* [4, 5].

Дадим формулу для вычисления производной функции $z = z(x,\, y)$ по направлению вектора $\overrightarrow{l}$ в точке $M_0(x_0,\, y_0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \operatorname{grad} z(M_0) \cdot \overrightarrow{l_1},$$

где $\overrightarrow{l_1} = \dfrac{\overrightarrow{l}}{|\,\overrightarrow{l}\,|}$ — орт вектора $\overrightarrow{l}$ — вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{l}$ и имеющий единичную длину.

Таким образом, перемножая скалярно градиент функции в точке M_0 и орт вектора $\overrightarrow{l}$, мы получаем производную функции $z = z(x,\, y)$ по направлению вектора $\overrightarrow{l}$ в точке M_0.

Пример 26. Дана функция $z = 9x^2y + 10xy^3$, точка $A(1,\, -1)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (3,\, 4)$. Найти 1) $\operatorname{grad} z(A)$, 2) $\dfrac{\partial z}{\partial a}(A)$.

1) Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 18xy + 10y^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9x^2 + 30xy^2$.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Таким образом $\operatorname{grad} z = \big(18xy + 10y^3,\, 9x^2 + 30xy^2\big)$. Найдем $\operatorname{grad} z(A)$.

$$\operatorname{grad} z(A) = \left(18xy + 10y^3\Big|_A,\, 9x^2 + 30xy^2\Big|_A\right) =$$

$$= (18 \cdot 1 \cdot (-1) + 10 \cdot (-1)^3,\, 9 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 \cdot (-1)^2) = (-28,\, 39).$$

2) Найдем орт вектора $\overrightarrow{a}$. Для этого разделим каждую координату вектора $\overrightarrow{a}$ на его длину. Вычислим длину вектора $\overrightarrow{a}$. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Таким образом орт вектора $\overrightarrow{a}$, вектор $\overrightarrow{a_1} = \left(-\dfrac{3}{5},\, \dfrac{4}{5}\right)$.

Перемножим скалярно $\operatorname{grad} z(A)$ и орт $\overrightarrow{a_1}$. Получим искомую производную функции $z = z(x,\, y)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{a}$.

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \operatorname{grad} z(A) \cdot \overrightarrow{a_1} = -28 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 39 \cdot \frac{4}{5} = \frac{84}{5} + \frac{156}{5} = \frac{240}{5} = 48.$$

Пример 27. Даны функция $z = \ln(x^2 + 4y^2)$, точка $A(-1,\, 1)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (2,\, -1)$. Найти 1) $\operatorname{grad} z(A)$, 2) $\dfrac{\partial z}{\partial a}(A)$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + 4y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}$.
$\operatorname{grad} z = \left(\dfrac{2x}{x^2 + 4y^2},\, \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}\right)$.
$\operatorname{grad} z(A) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + 4y^2}\Big|_A,\, \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}\Big|_A\right) = \left(\dfrac{-2}{1+4},\, \dfrac{8}{1+4}\right) = \left(-\dfrac{2}{5},\, \dfrac{8}{5}\right)$.

2)$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $\overrightarrow{a_1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ — орт вектора $\overrightarrow{a}$.

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \operatorname{grad} z(A) \cdot \overrightarrow{a_1} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5\sqrt{5}} - \frac{8}{5\sqrt{5}} = -\frac{12}{5\sqrt{5}}.$$

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Библиографический список

1. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд. *Алгебра и математический анализ 11.* — М.: Просвещение, 1990.

2. Данко П. Е., Попов А. Г. *Высшая математика в упражнениях и задачах. Части I,II.* — М.: Высшая школа, 1974.

3. Запорожец Г. И. *Руководство к решению задач по математическому анализу.* — М.: Высшая школа, 1966.

4. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов.* — М.: Наука, 1985.

5. Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа.* — СПб.: Лань, 2006.

Содержание