-

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Кафедра теоретической механики и ТММ

КИНЕМАТИКА

Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2009

УДК 531.1(0.75)+681.3.06(0.75)

Кинематика. Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов: учебно-методическое пособие /Сост. Н.В.Кузнецова, В.Е.Головко, М.В. Саблина С.Г.Петров. – 2-е изд. испр. и доп.- ГОУВПО СПбГТУРП. СПб., 2009. 55с.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся примеры решения задач по теоретической механики по разделам "Кинематика". В начале пособия кратко изложены основные теоретические положения, необходимые для решения задач. Далее, при рассмотрении решения каждой задачи указывается, как используется то или иное теоретическое положение.

Предназначено для студентов всех специальностей.

Рецензент: канд. техн. наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного технического университета растительных полимеров Ю.А. Тихонов.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №3 от 23.12.08.).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета механики автоматизированных производств СПбГТУРП (протокол
№ 4 от 29.01.09.).

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено в помощь студентам при самостоятельном изучении раздела “Кинематика” курса теоретической механики.

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учёта их массы и действующих на них сил.

Основной задачей кинематики является определение всех кинематических величин, характеризующих движение как отдельной точки, так и тела в целом (траектории, скорости, ускорения и т.п.).

Для решения этой задачи необходимо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение точки - это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить положение этой точки относительно выбранной системы отсчёта.

В пособии кратко изложены основные теоретические положения кинематики.

Затем приводятся примеры решения задач, при этом поясняется, какие теоретические положения используются при решении той или иной задачи.

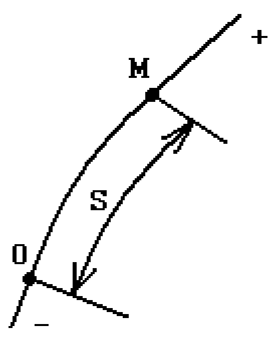
Задачи рассматривались из сборника задач по теоретической механике И.В. Мещерского. Номера из сборника задач указаны в скобках.

1. ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1.1. Естественный способ задания движения точки

Если траектория точки известна, то, выбрав на ней начало отсчёта O, положение точки M на траектории можно определить криволинейной координатой S.

При движении точки по траектории криволинейная координата непрерывно изменяется, т.е. координата S является функцией времени.



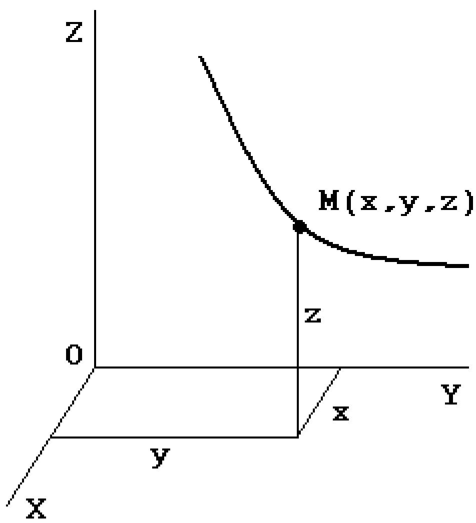
Чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо:

1) задать траекторию точки;
2) задать начало отсчёта на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчёта криволинейных координат;
3) задать криволинейную координату S как функцию времени

$$S = S(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) является уравнением движения точки в естественной форме.

1.2. Координатный способ задания движения точки



Положение точки M в системе отсчёта OXYZ определяется тремя координатами x,y,z. При движении точки M её координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы задать движение точки координатным способом, необходимо:

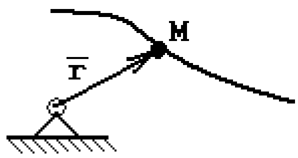
1) задать систему отсчёта;
2) задать координаты точки как функции времени

$$x = x(t);\;\; y = y(t);\;\; z = z(t). \tag{2}$$

Уравнения (2) выражают движение точки в декартовых координатах.

Движение точки M в одной плоскости описывается двумя уравнениями, а прямолинейное движение - одним.

1.3. Векторный способ задания движения точки



Положение точки М в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора $\bar{r}$, проведённого из начала координат в точку М.

При движении точки М радиус-вектор $\bar{r}$ изменяется, то есть $\bar{r}$ - это вектор-функция времени. Чтобы задать движение точки векторным способом, необходимо:

1) задать неподвижную точку в пространстве;
2) задать радиус-вектор точки как векторную функцию времени

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\ . \qquad (3)$$

Уравнение (3) выражает уравнение движения точки в векторной форме.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

2.1.Определение скорости точки

Скоростью точки называется вектор, характеризующий быстроту и направление точки в данной системе отсчёта, всегда направлен по касательной к траектории точки.

При естественном способе задания движения точки алгебраическая величина скорости равна производной от криволинейной координаты точки по времени

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

При $V > 0$ точка движется в сторону увеличения значений криволинейной координаты. При $V < 0$ точка движется в сторону уменьшения криволинейной координаты точки.

При задании движения точки координатным способом проекции скорости точки на оси координат равны производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{X}\ ; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{Y}\ ; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{Z}\ .$$

Модуль и направление скорости определяются по формулам:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}\ ;$$

$$\cos a = \cos(\overline{V}, \overline{i}) = \frac{V_x}{V}\ ;$$

$$\cos \beta = \cos(\overline{V}, \overline{j}) = \frac{V_y}{V}\ ;$$

$$\cos \gamma = \cos(\overline{V}, \overline{k}) = \frac{V_z}{V}\ .$$

При векторном способе задания движения точки вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора точки $\overline{r}$ по времени

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}}\ .$$

2.2. Определение ускорения точки

Ускорением точки называется вектор, характеризующий быстроту изменения скорости. Ускорение точки есть производная от скорости по времени.

При естественном способе задания движения точки вектор ускорения имеет две составляющие:

$$\overline{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}\ .$$

a_τ - *касательное* ускорение, которое характеризует быстроту изменения скорости по величине, направлено по касательной к траектории.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\ .$$

Если $\frac{d^2S}{dt^2}$ и $\frac{dS}{dt}$ имеют одинаковые знаки, скорость и касательное ускорение направлены в одну сторону, точка совершает ускоренное движение.

Если $\dfrac{d^2S}{dt^2}$ и $\dfrac{dS}{dt}$ имеют разные знаки, скорость и касательное ускорение направлены в противоположные стороны, точка совершает замедленное движение.

a_n – *нормальное* ускорение, характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению:

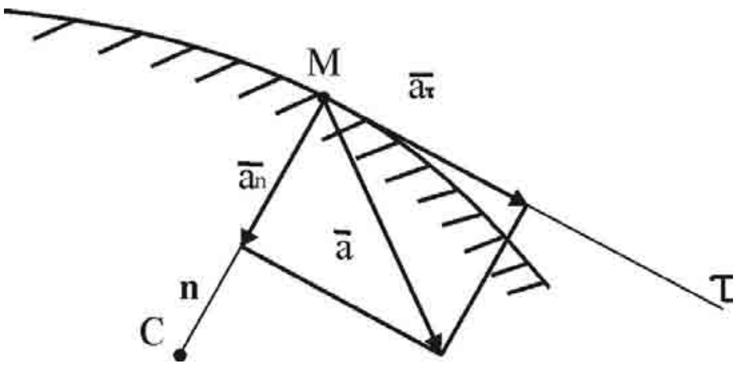
$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение всегда положительно и направлено к центру кривизны траектории.

Учитывая, что касательное и нормальное ускорения перпендикулярны друг другу, модуль *полного* ускорения можно вычислить:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



При координатном способе задания движения точки проекции вектора ускорения на координатные оси определяются первыми производными по времени от соответствующих проекций скорости или вторыми производными по времени от соответствующих координат точки.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y};$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами

$$\cos a = \cos(\overline{a}, \overline{i}) = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos \beta = \cos(\overline{a}, \overline{j}) = \frac{a_y}{a};$$

$$\cos \gamma = \cos(\overline{a}, \overline{k}) = \frac{a_z}{a}\ .$$

При векторном способе задания движения точки вектор ускорения в данный момент времени равен производной от вектора скорости точки по времени или второй производной от радиуса-вектора точки $\overline{r}$:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\ .$$

3. ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

При изучении кинематики твёрдого тела сначала устанавливаются кинематические характеристики движения всего тела, а затем изучается движение его точек в отдельности.

Различают пять видов движения твёрдого тела:

1) поступательное движение;
2) вращательное движение вокруг неподвижной оси;
3) плоское или плоско-параллельное движение;
4) движение тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение;
5) общий случай движения.

Поступательное и вращательное движение тела вокруг неподвижной оси – это простейшие движения.

Остальные – это составные движения, состоящие из различных совокупностей простейших движений.

3.1. Поступательное движение твёрдого тела.

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведённая в этом теле, перемещается параллельно своему первоначальному положению.

При поступательном движении скорости всех точек тела геометрически равны, ускорения всех точек геометрически равны, траектории всех точек тождественны и параллельны.

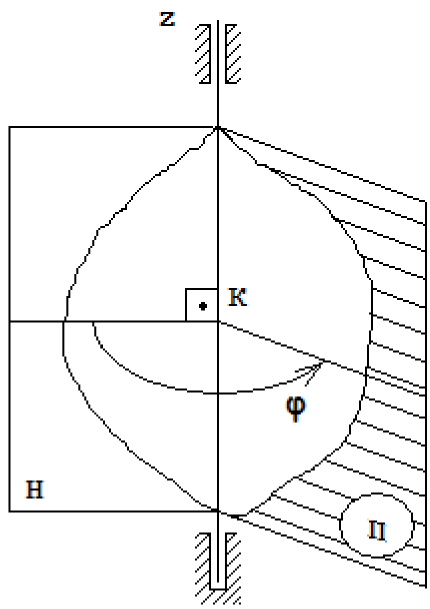
Свойства поступательного движения позволяют свести его изучение к изучению движения отдельной точки тела.

3.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки, лежащие на одной прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными, остальные точки описывают окружности с центрами, находящимися на оси вращения, и с радиусами, равными по длине расстоянию от точки до оси вращения. Эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения.

Для определения положения вращающегося тела зададимся направлением оси вращения Z и проведём через неё полуплоскости:

- неподвижную полуплоскость Н;
- подвижную П, связанную с телом и вращающуюся вместе с ним.



Угол φ между полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости Н к подвижной полуплоскости П, называется *углом поворота* тела.

Угол поворота тела считается положительным, когда он отложен против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения Z.

Угол поворота тела обычно измеряется в радианах. Часто угол поворота тела выражается через число оборотов N тела. Поскольку один оборот соответствует 2π радиан, то получается

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад.}$$

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени φ = φ(t), это уравнение – уравнение вращательного движения тела.

Основными кинематическими характеристиками являются *угловая скорость* и *угловое ускорение* тела.

Угловой скоростью называется вектор, характеризующий быстроту и направление вращения тела. Обозначается $\overline{\omega}$, основная размерность:

$$[\omega] = \text{рад/с} = \frac{1}{c} = \text{с}^{-1};$$

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30} \quad (\text{с}^{-1}).$$

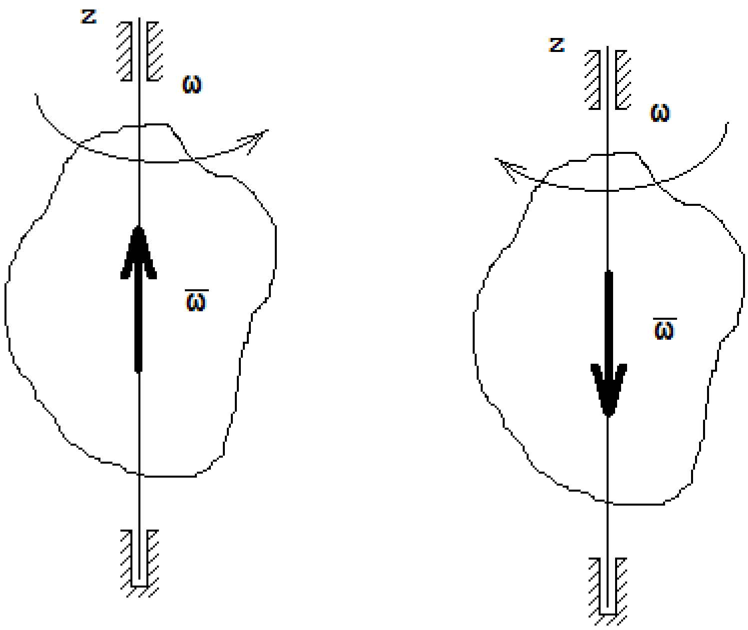
Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота тела по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела.

Если $\frac{d\varphi}{dt} = \omega > 0$, то тело вращается против хода часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси Z, если $\frac{d\varphi}{dt} = \omega < 0$, то тело вращается по ходу часовой стрелки.

Условно угловая скорость изображается вектором, направленным по оси вращения так, чтобы, смотря навстречу вектору, видеть, что тело вращается против хода часовой стрелки.



Угловым ускорением называется вектор, характеризующий изменение с течением времени угловой скорости тела.

Обозначается $\bar{\varepsilon}$, основная размерность [ε] = рад/с^2 = $\dfrac{1}{c^2}$ = с$^{-2}$:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

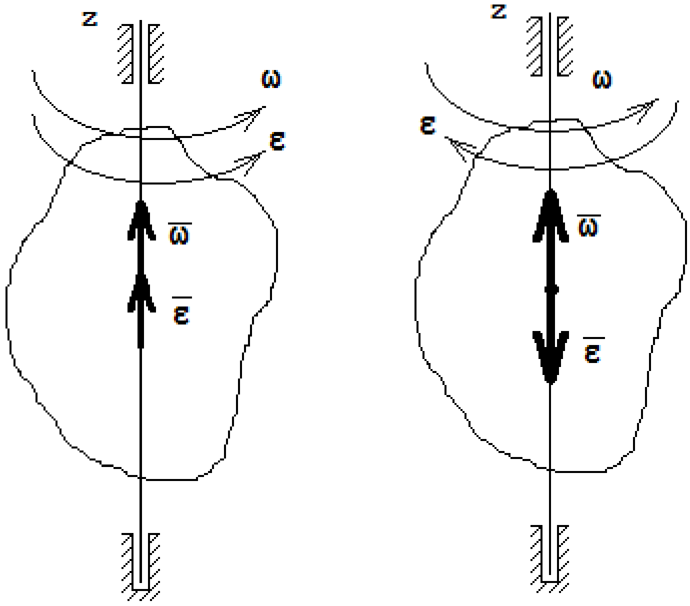
Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Знак углового ускорения даёт возможность установить, является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным.

Если знаки угловой скорости и углового ускорения одинаковы – тело вращается ускоренно, если различны – замедленно.

Вектор углового ускорения, так же, как и вектор угловой скорости, направлен вдоль оси вращения.

При ускоренном вращении направление $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают, при замедленном – противоположны.



Скорость точки вращающегося тела называется *вращательной* или *линейной* скоростью этой точки.

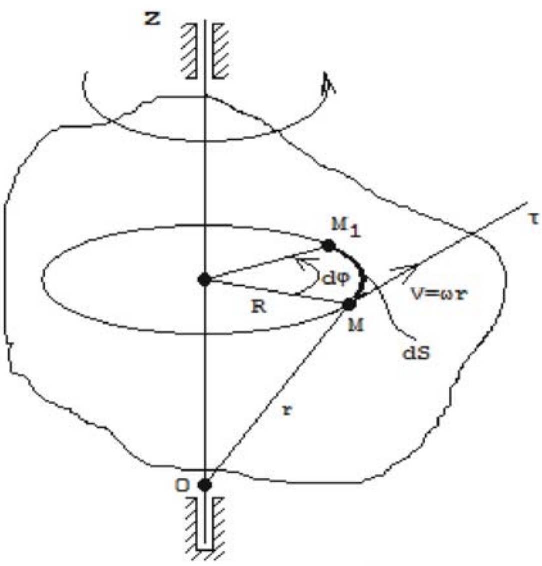
Скорость точки вращающегося тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние этой точки от оси вращения (радиус вращения):

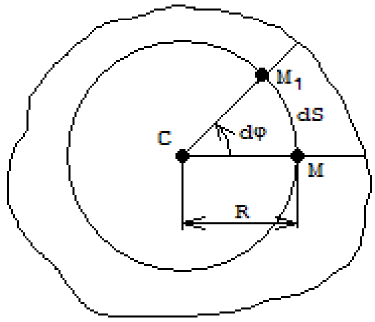
$$V = \omega\, R.$$

Направлен вектор V по касательной к траектории точки в сторону вращения тела:

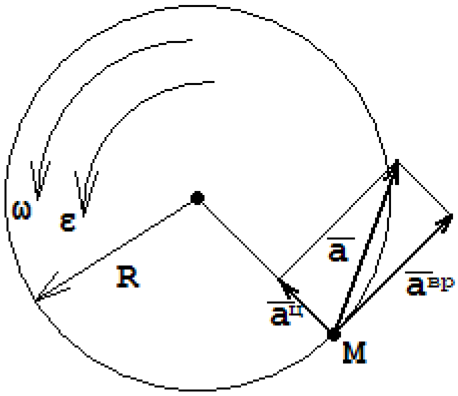
$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Вращательная скорость точки вращающегося тела равна векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведённый из любой точки оси вращения.





Ускорение точки М вращающегося тела определяется по его составляющим: касательному, которое в этом случае называется *вращательным* и обозначается $\vec{a}^{\,вр}$, и нормальному ускорению, которое в этом случае называется *центростремительным* и обозначается $\vec{a}^{\,ц}$:



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{a}^{\,вр} + \vec{a}^{\,ц}.$$

Ошибка! Закладка не определена.Ошибка! Закладка не определена.

Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения точки на расстояние этой точки от оси вращения (на радиус вращения):

$$a^{вр} = \varepsilon R.$$

Вращательное ускорение направлено перпендикулярно к радиусу вращения.

В случае ускоренного вращения вращательное ускорение совпадает с направлением вращательной скорости и противоположно в случае замедленного вращения тела.

Модуль центростремительного ускорения тела равен произведению квадрата угловой скорости тела на радиус вращения тела:

$$a^{ц} = \omega^2 R.$$

Направлено центростремительное ускорение всегда к центру окружности, описываемой точкой.

Модуль полного ускорения определяется по формуле

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Направление полного ускорения точки $\vec{a}$ определяется углом между $\vec{a}$ и $\vec{a}^{ц}$ (радиусом окружности, описываемой точкой):

$$tg(\vec{a}, \vec{a}^{ц}) = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

3.3. Плоско-параллельное движение твёрдого тела

Плоским или *плоско-параллельным* называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. При таком движении все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярной к этой неподвижной плоскости, имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения. Следовательно, при изучении плоско-параллельного движения твердого тела достаточно исследовать движение плоской фигуры, которая является сечением этого тела плоскостью, параллельной неподвижной.

Если принять любую точку тела А за полюс, то плоское движение складывается из поступательного движения тела вместе с полюсом А и вращательного движения вокруг этого полюса. В системе координат, жестко связанной с плоской фигурой, уравнения плоского движения имеют вид:

$$X_A = X_A(t); \qquad Y_A = Y_A(t); \qquad \varphi = \varphi(t).$$

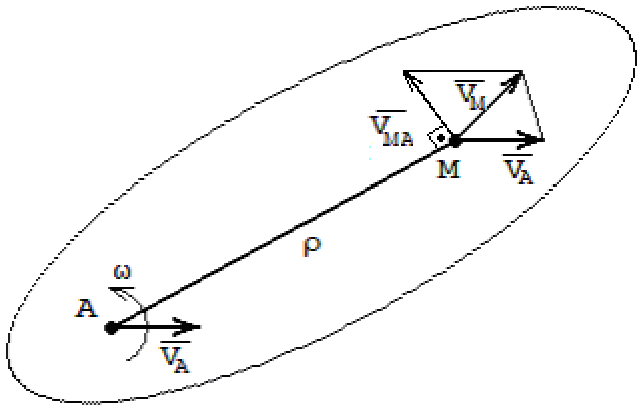
Здесь поступательное движение полюса определяется первыми двумя уравнениями, вращательного движение вокруг этого полюса – третьим уравнением.

Скорость любой точки тела М при плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса А:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}.$$

Вращательная скорость $\vec{V}_{MA}$ направлена перпендикулярно к отрезку $\overrightarrow{AM}$ в сторону вращения тела и по модулю равна произведению угловой скорости тела на расстояние точки от полюса. Модуль и направление вращательной скорости определяются формулами

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM};; \quad \vec{V}_{MA} \perp \overrightarrow{AM}..$$

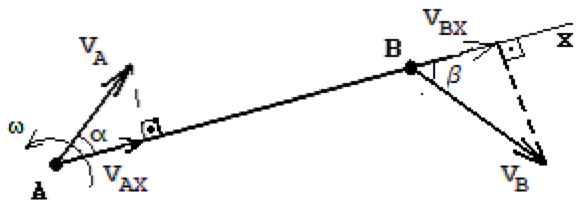


Вращательную скорость $\vec{V}_{MA}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ тела на радиус-вектор $\overline{AM}$ точки М, проведённой из полюса А:

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \text{ где } \overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{AM}.$$

Скорость точки М при плоском движении тела изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке М на скорости полюса А, перенесённого в точку М, и вращательной скорости точки М вокруг полюса А.

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, алгебраически равны.



$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta;$$

$$V_{Ax} = V_{Bx}.$$

3.3.1. Мгновенный центр скоростей

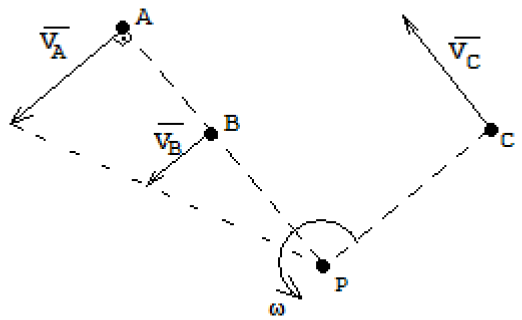
Если движение плоской фигуры в данный момент времени не является поступательным (угловая скорость $\vec{\omega} \neq 0$), то в этот момент времени существует единственная точка P плоской фигуры, скорость которой в данной момент равна нулю. Скорости остальных точек находятся, как при вращении фигуры вокруг точки P. Точка P называется *мгновенным центром скоростей* (МЦС).

МЦС находится на перпендикуляре к вектору скорости полюса на расстоянии от полюса $\frac{V_A}{\omega}$. Направление перпендикуляра находится поворотом вектора $\vec{V}_A$ на 90° в сторону вращения тела вокруг полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры по модулю равна произведению угловой скорости на расстояние этой точки от МЦС и направлена перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону вращения тела:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM}; \quad \vec{V} \perp \overrightarrow{PM}.$$

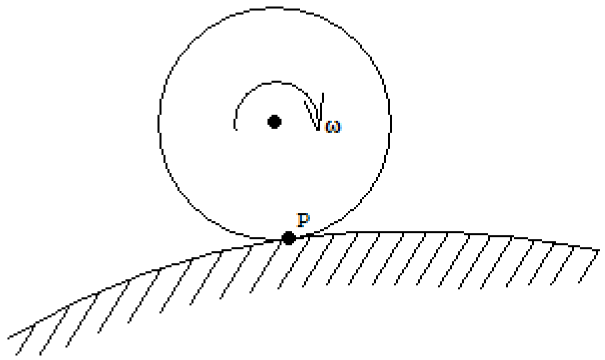
Модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям этих точек до МЦС.



Определение положения мгновенного центра скоростей

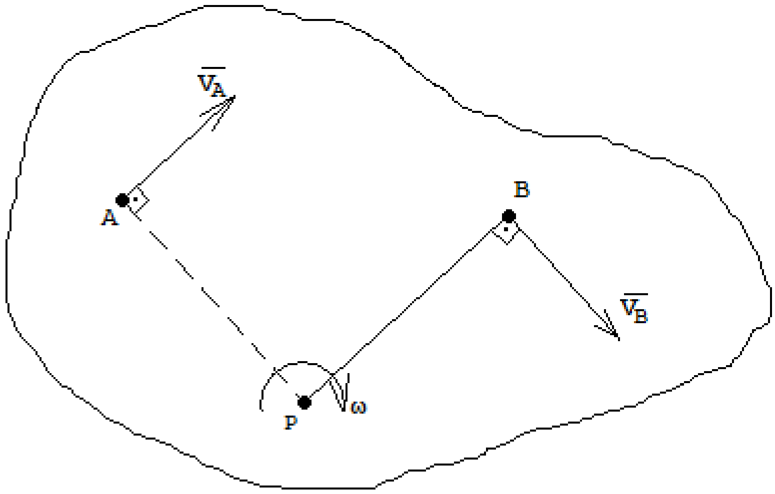
1. Плоское движение осуществляется путём качения без скольжения выпуклой плоской фигуры по неподвижной выпуклой прямой.

В этом случае МЦС находится в точке P соприкосновения плоских кривых. В точке касания точки кривых должны иметь одинаковые скорости. Так как одна из плоских кривых неподвижна, то точка соприкосновения есть МЦС.



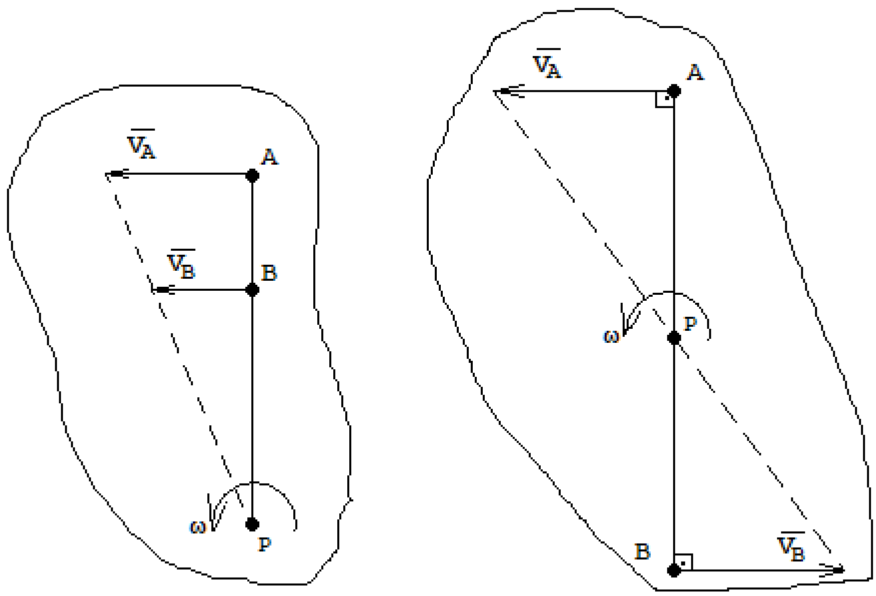
2. Известны направления скоростей точек A и B плоской фигуры.

В этом случае МЦС находится в точке P пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям этих скоростей.



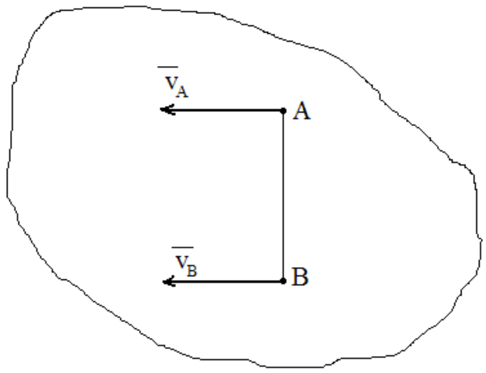
3. Векторы скоростей двух точек A и B фигуры параллельны между собой и перпендикулярны отрезку AB. Случай, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ не перпендикулярен $\overrightarrow{V_A}$ (или $\overrightarrow{V_B}$), невозможен, так как тогда не будут равны проекции $\overrightarrow{V_A}$ и $\overrightarrow{V_B}$ на прямую, проходящую через точки A и B.

В этом случае МЦС находится в точке P пересечения отрезка AB или его продолжения с прямой, проходящей через концы векторов $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$:



4. Скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны между собой, равны по модулю и направлены в одну сторону.

В этом случае тело совершает поступательное движение, и МЦС находится в бесконечности.



3.3.2. Ускорение точек плоской фигуры

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется геометрической суммой ускорения полюса и ускорения во вращательном движении точки вокруг этого полюса:

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{BA}},$$

где $\overrightarrow{a_A}$ – ускорение полюса;

$\vec{a}_{BA}$ – ускорение во вращательном движении точки B вокруг полюса A.

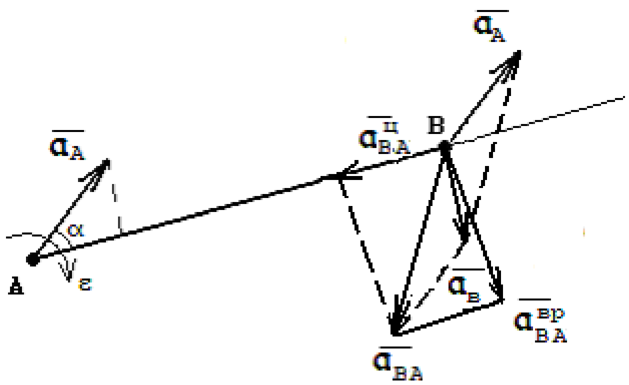
Ускорение во вращательном движении, в свою очередь, складывается из двух составляющих: центростремительного $\overline{a}_{BA}^{ц}$ и вращательного $\overline{a}_{BA}^{вр}$:

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}.$$

Величины $\overline{a}_{BA}^{ц}$ и $\overline{a}_{BA}^{вр}$ определяются: $\overline{a}_{BA}^{ц} = -\omega^2 \overline{AB}$; $\overline{a}_{BA}^{вр} = \overline{\varepsilon} \times \overline{AB}$

Таким образом, ускорение точки плоской фигуры определяется из выражения

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}.$$



3.3.3. Мгновенный центр ускорений

В любой момент времени непоступательного движения плоской фигуры существует единственная точка, ускорение которой в этот момент равно нулю.

Эта точка называется *мгновенным центром ускорений* Q (МЦУ).

Для определения МЦУ звена АВ необходимо знать ускорение одной из точек, например А, угловую скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ этого звена.

Расстояние от точки А до МЦУ, точки Q, равно

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Угол β, который составляет вектор ускорения точки А с прямой AQ, определяется из выражений

$$tg\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}; \ \beta = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Угол β откладывается от ускорения точки А в сторону углового ускорения ε, и проводится прямая, на которой откладывается расстояние AQ.

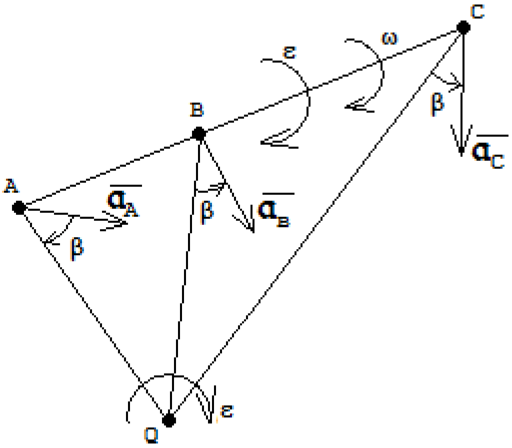
Для определения ускорения точки В следует соединить точки В и Q, и от этой прямой отложить угол β в ту сторону, чтобы ускорения точек А и В были направлены относительно мгновенного центра ускорений в сторону направления углового ускорения ε.

Модуль ускорения точки В определяется по формулам

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{AQ}{BQ},$$

т.е. модули ускорений точек звена, совершающего плоское движение, пропорциональны расстояниям этих точек до МЦУ. Для определения ускорения любой точки С звена АВ надо соединить точки С и Q, и от этой прямой отложить угол β в сторону, противоположную направлению ε:

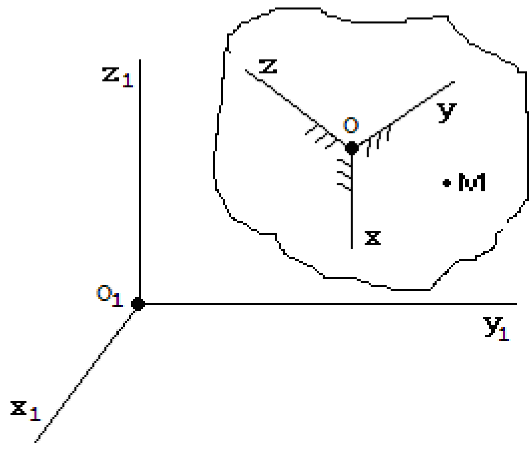


Модуль ускорения любой точки можно определить:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ}.$$

3.4. Сложное движение точки твёрдого тела

Сложным называется такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях:



Рассмотрим движущееся тело А и точку М, не принадлежащую этому телу и совершающую по отношению к нему некоторое движение.

Через произвольную точку О движущегося тела А проведём оси координат X, Y, Z, связанные с этим телом. Систему осей X, Y, Z, называют *подвижной* системой отсчёта.

Неподвижные оси координат X_1, Y_1, Z_1 жестко связаны с землёй. Систему осей X_1, Y_1, Z_1 называют *неподвижной* системой отсчёта.

Движение точки М относительно подвижной системы отсчёта называют *относительным*.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называются *относительной скоростью* и *относительным ускорением* и обозначаются V_r и a_r (от латинского relativus - относительный).

Движение подвижной системы отсчёта X, Y, Z и связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчёта X_1,Y_1,Z_1 является для точки M *переносным* движением.

Скорость и ускорение точки тела A, связанного с подвижной системой отсчёта, совпадающей в данный момент времени с движущейся точкой M, называются *переносной скоростью* и *переносным ускорением* точки M и обозначаются V_e и a_e (от французского enterainer – увлекать за собой).

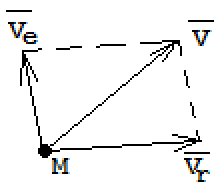
<u>Задачи на сложение движений и определения траекторий, делятся на два типа:</u>

- известны относительное и переносное движения точки; требуется определить уравнения абсолютного движения и абсолютную траекторию точки;
- известны абсолютное и переносное движения точки; требуется определить уравнение относительного движения и относительную траекторию точки.

Первая задача сводится к сложению составляющих движения точки. Вторая – заключается в разложении известного абсолютного движения на заданное переносное и подлежащее определению относительное.

Абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скорости этой точки:

$$\overline{V} = \overline{V_e} + \overline{V_r}$$



Модуль *абсолютной скорости* определяется по формуле:

$$\overline{V} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos(\overline{V_r}, \overline{V_r})}\,.$$

Абсолютное ускорение точки при сложном движении определяется на основании теоремы Кориолиса.

При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение при сложном движении точки равно геометрической сумме относительного $\overline{a_r}$, переносного $\overline{a_e}$ и Кориолисова $\overline{a_C}$ ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_C}\,.$$

В случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение при сложном движении точки равно геометрической сумме относительного $\overline{a_r}$ и переносного $\overline{a_e}$ ускорений точки:

$$\overline{a} = \overline{a_r} + \overline{a_e}\,.$$

В общем случае при переносном вращательном движении абсолютное ускорение можно представить в виде $\overline{a} = \overline{a_{r\tau}} + \overline{a_{rn}} + \overline{a_e^{вр}} + \overline{a_e^{ц}} + \overline{a_C}$ или $\overline{a} = \overline{a_r^{\varepsilon}} + \overline{a_r^{\omega}} + \overline{a_e^{\varepsilon}} + \overline{a_e^{\omega}} + \overline{a_C}$.

Относительное ускорение $\overline{a_r}$ характеризует изменение относительной скорости $\overline{V}_r$ в относительном движении точки и вычисляется общими методами кинематики точки $\overline{a_r} = \overline{a_{r\tau}} + \overline{a_{rn}}$ или $\overline{a}_r = \overline{a_r^{\varepsilon}} + \overline{a_r^{\omega}}$.

Переносное ускорение $\overline{a_e}$ характеризует изменение переносной скорости $\overline{V}_e$ в переносном движении точки и вычисляется методами кинематики твёрдого тела $\overline{a_e} = \overline{a_e^{вр}} + \overline{a_e^{ц}} = \overline{a_r^{\varepsilon}} + \overline{a_r^{\omega}}$.

Кориолисовым ускорением $\overline{a_C}$ называется составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного вращения на вектор относительной скорости:

$$\overline{a_C} = 2(\overline{\omega_e} \times \overline{V_r})\,.$$

Кориолисово ускорение существует только при сложном движении и только в случае, когда переносное движение не поступательно.

Кориолисово ускорение появляется в результате:

а) изменения модуля и направления переносной скорости точки вследствие её относительного движения;

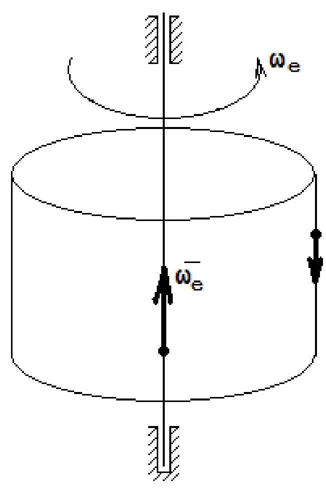
б) изменения направления относительной скорости точки вследствие вращательного переносного движения.

Модуль Кориолисова ускорения определяется как модуль векторного произведения:

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{V}_r})\,.$$

Кориолисово ускорение обращается в ноль:

а) если $\omega_e = 0$, отсутствует вращение, т.е. в случае поступательного переносного движения или в моменты, когда угловая скорость непоступательного переносного движения обращается в ноль;



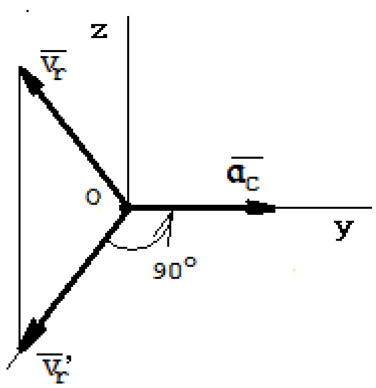
б) если $V_r = 0$, т.е. в случае относительного покоя точки, или в моменты, когда её относительная скорость обращается в ноль;

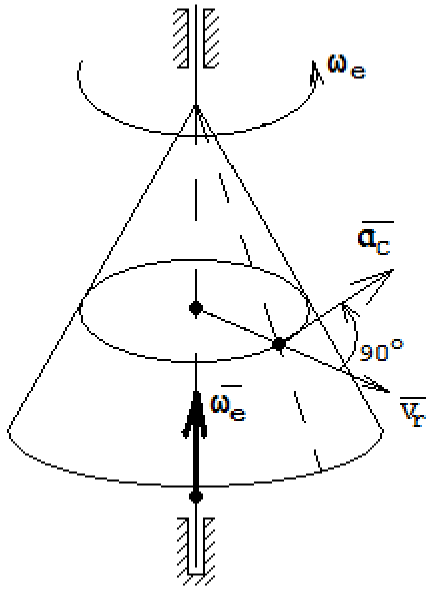
в) если $\sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r) = 0$, т.е. когда относительная скорость $\overline{V}_r$ точки параллельна оси переносного вращения $\overline{\omega_e} \parallel \overline{V_r}$.

Направление Кориолисова ускорения определяется как направление векторного произведения.

Вектор Кориолисова ускорения $\overline{a}_C$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение векторов $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ видно происходящим против хода часовой стрелки.

Для определения направления Кориолисова ускорения удобно пользоваться правилом профессора Жуковского:





Для определения направления Кориолисова ускорения необходимо спроектировать вектор относительной скорости $\overline{V}_r$ точки на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в этой же плоскости на 90° в сторону переносного вращения.

ЗАДАЧИ

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

Задача №1 (10.2)

По данным уравнениям движения точки найти уравнения её траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

1. $x=3t-5$, $y=4-2t$.

Для получения уравнения движения точки из заданных уравнений исключаем время t.

$$\begin{array}{l|ll} x=3t-5 & \times 2; & 2x=6t-10 \\ y=4-2t & \times 3; & \underline{3y=4-6t\quad\quad\quad} \\ & & 2x+3y-2=0 \end{array}$$

– уравнение прямой линии.

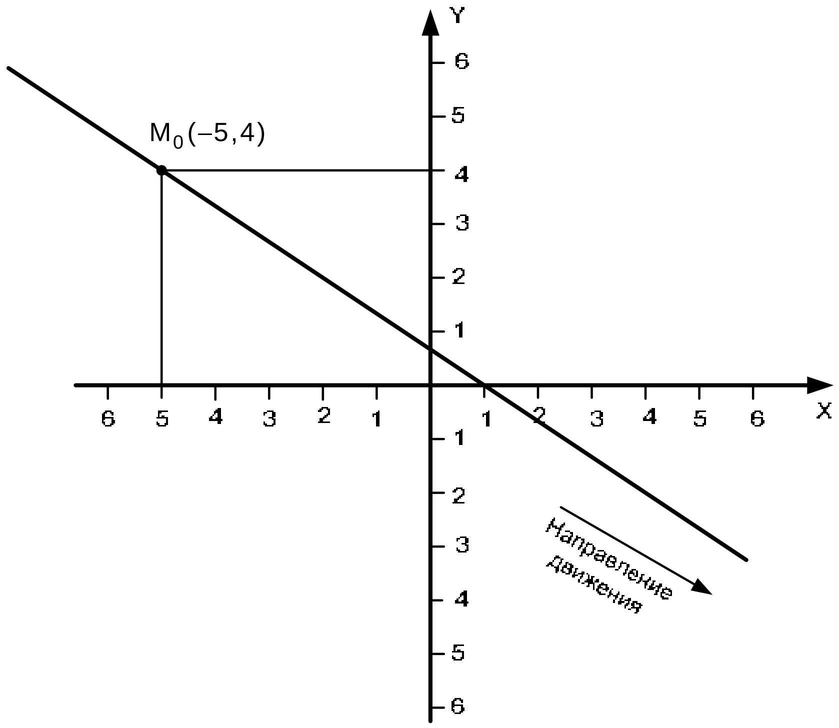
Для построения прямой линии достаточно двух точек:

при $x=0$; $y=\dfrac{2}{3}$;

при $y=0$; $x=1$.

Для определения направления движения в начале определяется точка начала движения при $t_0=0$: $X_0=-5$, $Y_0=4$,

а затем точка при любом значении $t>0$.



t	x	y
0	-5	4
1	-2	2

<u>Ответ:</u> полупрямая $2x+3y-2=0$ с началом в точке $x=-5$, $y=4$.

2. $x = 2t, y = 8t^2$.

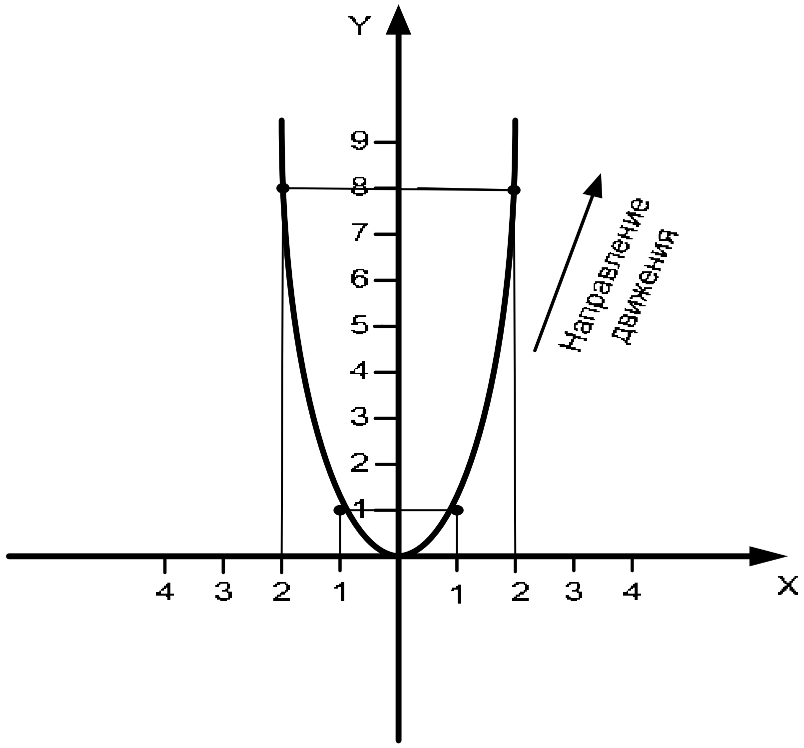
Для получения уравнения траектории исключаем время t из заданных уравнений:

$t = \dfrac{x}{2}$; $y = 8\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 2x^2$;

$y = 2x^2$ – уравнение квадратной параболы.

Для построения траектории точки определяем координаты точек параболы в различные моменты времени (см. таблицу).

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



Движение начинается из точки M_0 (0,0) и происходит по правой ветви параболы.

Ответ: правая ветвь параболы y = $2x^2$ с начальной точкой x = 0, y = 0.

3. x = 2 – 3cos5t; y = 4sin5t – 1.

Для получения уравнения траектории исключаем время t из данных уравнений

$$\cos 5t = \frac{2-x}{3};\quad \sin 5t = \frac{y+1}{4}\ .$$

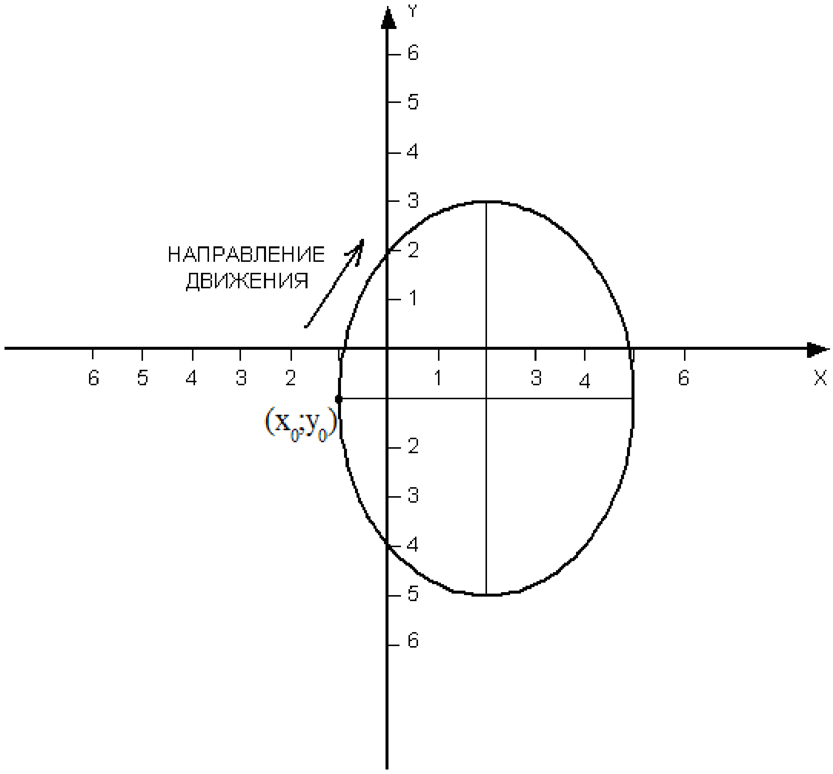
Эти два уравнения возводим в квадрат и складываем:

$$\cos^2 5t = \frac{(x-2)^2}{3^2};\quad \sin^2 5t = \frac{(y+1)^2}{4^2};$$

$$\sin^2 5t + \cos^2 5t = 1.$$

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{4^2}=1$$ - уравнение эллипса.

Начало движения при $t_0=0, x_0=-1$; $y_0=-1$.



Ответ: эллипс $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ с начальной точкой x = –1, y = –1.

Задача №2

Движение точки задано уравнениями : $x=3t, y=\frac{3}{t}$ (см).

Определить в моменты времени $t_1=1c$ и $t_2=2c$ скорость точки, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Определить и построить траекторию точки.

Решение

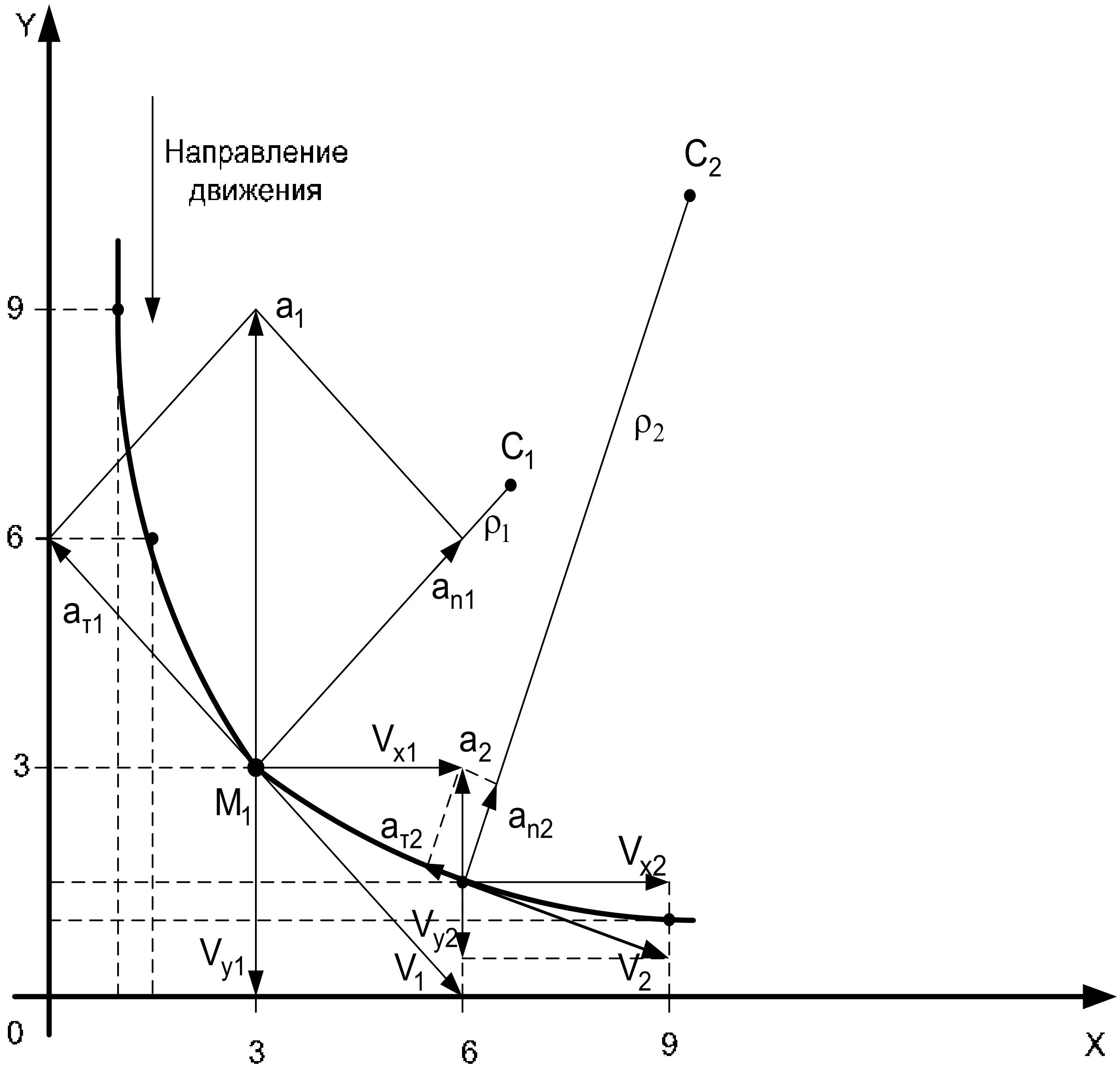
Для определения уравнения точки исключаем параметр t из уравнений движения: $t=\frac{x}{3}$. Подставляем это значение в уравнение координаты y:

$y=\frac{9}{x}$ – уравнение гиперболы.

Точка движется по ветви гиперболы, расположенной в верхнем правом квадрате, так как при подстановке времени $t>0$ в уравнения движения обе координаты принимают положительное значение. Движение точки происходит сверху вниз.

Траекторию строим по координатам (см. таблицу)

Время t,с	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
Хсм	0	1	1,5	3	6	9	∞
Yсм	∞	9	6	3	1,5	1	0



Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = 3\frac{см}{с} \ ; \quad V_y = \dot{y} = -\frac{3}{t^2}\frac{см}{с} \, .$$

Проекции скорости и их значения для точек в заданный момент времени:

При $t_1 = 1с$; $V_{x1} = 3\frac{см}{с}$; $V_{y1} = -\frac{3}{1^2} = -3\frac{см}{с}$;

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4,2\left(\frac{см}{с}\right).$$

При $t_2 = 2c$; $V_{x2} = 3\left(\frac{см}{с}\right)$; $V_{y2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{см}{с}\right)$;

$$V_2 = \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 3,1\left(\frac{см}{с}\right).$$

Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{t^2}\right) = \frac{6}{t^3}\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Проекции ускорения и их значения для точек в заданный момент времени:

При $t_1 = 1c$: $a_{x1} = 0$; $a_{y1} = \frac{6}{1^3} = 6\left(\frac{см}{с^2}\right)$; $a_1 = \left|a_{y1}\right| = 6\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

При $t_2 = 2c$: $a_{x2} = 0$; $a_{y2} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{с^2}\right)$; $a_2 = \left|a_{y2}\right| = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

Для определения касательного и нормального ускорений переходим к естественному способу задания движения точки.

Касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При $t_1 = 1c$; $a_{\tau 1} = \frac{3 \cdot 0 + (-3) \cdot 6}{4,2} = -\frac{18}{4,2} = -4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$;

$$a_{\tau 2} = \frac{3 \cdot 0 - 0,75 \cdot 0,75}{3,1} = -0,18\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Нормальные ускорения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau 2}^2}.$$

При $t_1 = 1c$; $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{6^2 - (-4,2)^2} = 4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

При $t_2 = 2c$; $a_{n2} = \sqrt{a_2^2 - a_{\tau 2}^2} = \sqrt{0,75^2 - (-0,18)^2} = 0,71\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

Определяем радиус кривизны траектории в заданные моменты времени:

$$a_n = \frac{a^2}{\rho};\ \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_1 = 1c$; $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{4,2^2}{4,2} = 4,2(см)$.

При $t_2 = 2c$; $\rho_2 = \frac{V_2^2}{a_{n2}} = \frac{3,1^2}{0,71} = 13,5(см)$.

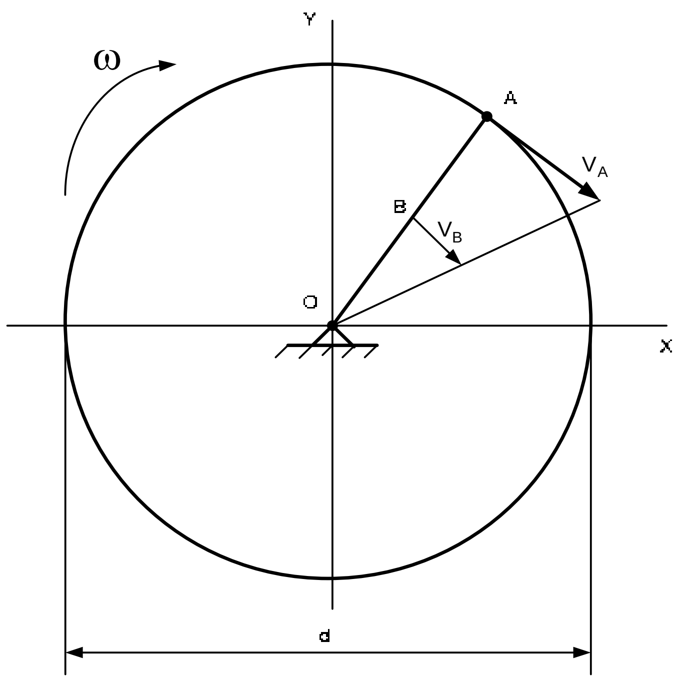
Все результаты решения показаны на чертеже.

<u>Ответ:</u> при $t_1 = 1c$: $V_1 = 4,2\left(\frac{см}{c}\right)$, $a_1 = 6\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $a_{\tau 1} = -4,2\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $a_{n1} = 4,2\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $\rho_1 = 4,2(см)$; при $t_2 = 2c$: $V_2 = 3,1\left(\frac{см}{c}\right)$, $a_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $a_{\tau 2} = -0,18\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $a_{n2} = 0,71\left(\frac{см}{c^2}\right)$, $\rho_2 = 13,5(см)$.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Задача №1 (13.14)

Точка А шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью $50\frac{см}{c}$, а некоторая точка В, взятая на одном радиусе с точкой А, движется со скоростью $10\frac{см}{c}$; расстояние АВ=20 см. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.



1. Определяем диаметр диска, воспользовавшись прямо пропорциональной зависимостью скоростей точек шкива оси и их расстояния до оси вращения:

$$OA=\frac{d}{2};\quad OB=\frac{d}{2}-20;.$$

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{OA}{OB};\quad \frac{V_A}{V_B}=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}-20}=\frac{50}{10};\ 2{,}5d-100=0{,}5d;\quad d=50\text{ см.}$$

2.Определим угловую скорость шкива:

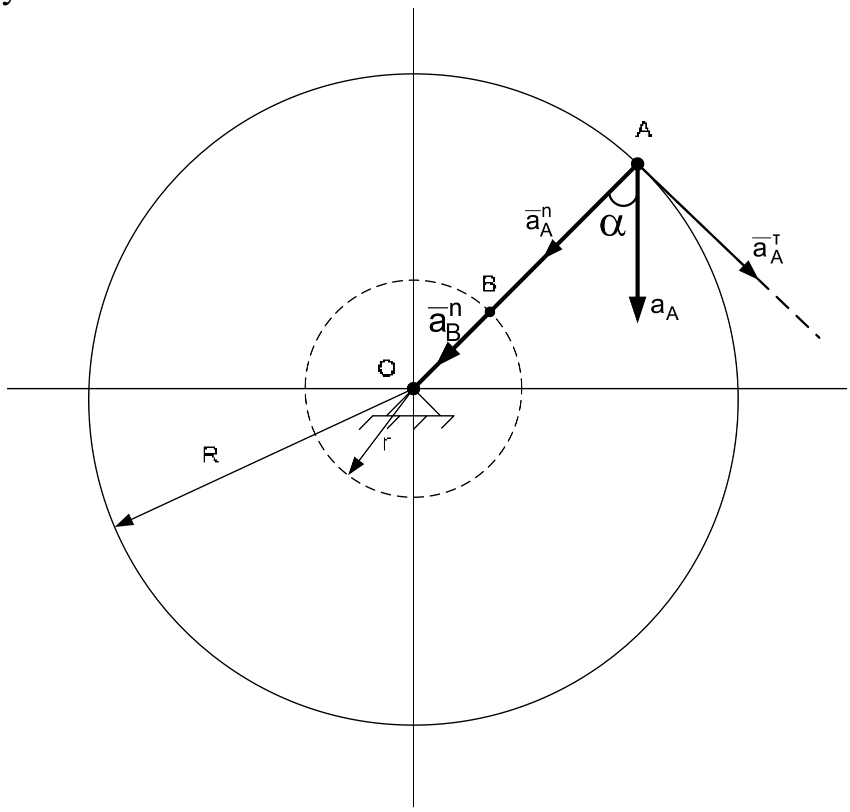
$$\omega=\frac{V_A}{\frac{d}{2}}=\frac{2\cdot 50}{50}=2\left(\frac{рад}{c}\right).$$

<u>Ответ:</u> ω = 2 рад/с, d = 50 см.

Задача №2

Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60^0. Касательное ускорение ее в данный момент $a_\tau=10\sqrt{3}\,\frac{м}{c^2}$.

<u>Найти:</u> нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии r = 0,5м. Радиус махового колеса R=1м.



Решение

$$tg\alpha = \left(\bar{a}, \bar{a}^n\right) = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

1.Определяем нормальное ускорение точки А:

$$a_A^n = a_A^\tau \cdot ctg\alpha = 10\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 10\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

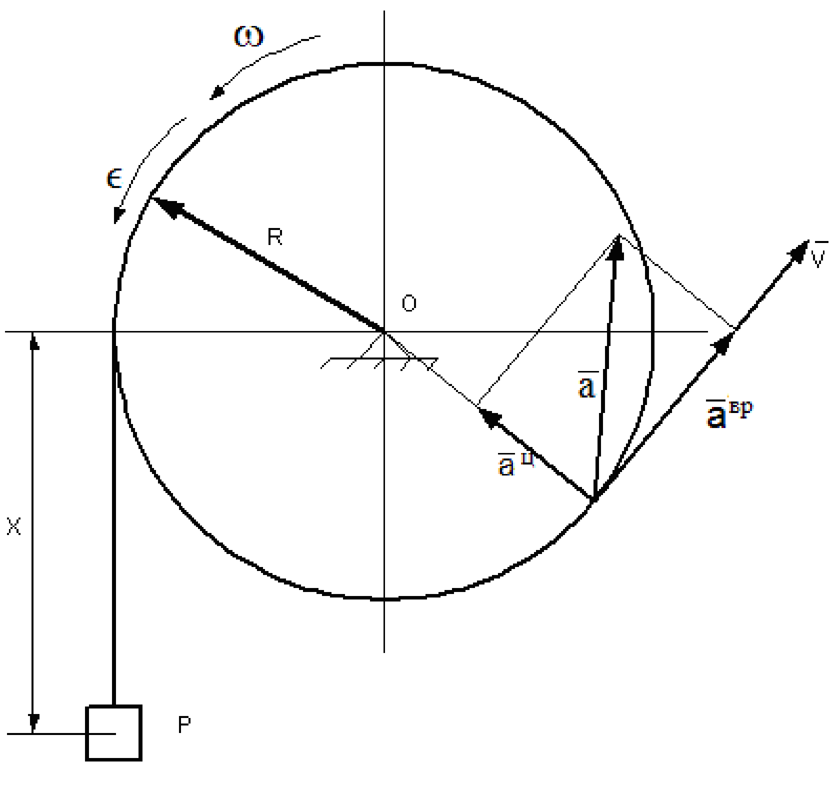
2. Определяем нормальное ускорение точки В:

$$a_B^n = a_A^n \frac{r}{R} = \frac{a_A^n}{2} = \frac{10}{2} = 5\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

<u>Ответ:</u> $a_B^n = 5\left(\frac{м}{с^2}\right).$

Задача №3

Вал радиуса R=10 см приводится во вращение гирей Р, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x – расстояние гири от места схода нити с поверхностью вала, выраженное в сантиметрах, t – время в секундах. <u>Определить:</u> угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение точки на поверхности вала момент времени t.



Решение

1. Определяем уравнение вращения вала:

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{100t^2}{10} = 10t^2 \text{ (рад).}$$

2. Определяем угловую скорость и угловое ускорение вращающегося вала:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = 20t \ \left(\frac{рад}{с}\right);$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 20 \ \left(\frac{рад}{с^2}\right).$$

Угловая скорость и угловое ускорение направлены в сторону возрастания угла φ.

3.Определяем скорость точки М на ободе вала:

$$V_M = \omega \cdot R = 20t \cdot 10 = 200t \ \left(\frac{см}{с}\right).$$

4.Определяем ускорение точки М на ободе вала:

$$a^{вр} = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200 \ \left(\frac{см}{с^2}\right);$$

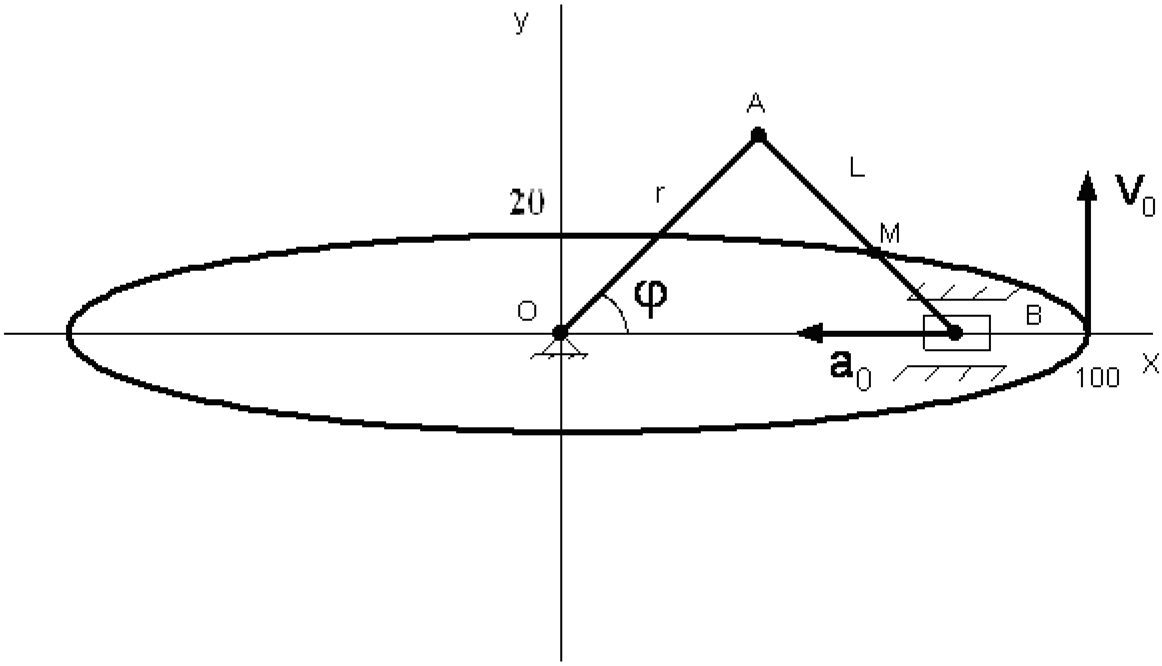
$$a^{ц} = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 10 = 4000t^2 \ \left(\frac{см}{с^2}\right);$$

$$a = \sqrt{\left(a^{вр}\right)^2 + \left(a^{ц}\right)^2} = \sqrt{200^2 + \left(4000t^2\right)^2} = 200\sqrt{1+400t^2} \ \left(\frac{см}{с^2}\right).$$

<u>Ответ:</u> $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с^2, $a = 200\sqrt{1+400t^2} \ \left(\frac{см}{с^2}\right)$.

Задача №4 (12.18)

<u>Найти</u> траекторию точки М шатуна кривошипно-ползунного механизма, если r = L = 60см, $MB = \frac{1}{3}L$, $\varphi = 4\pi t$ (t- в секундах), а также <u>определить</u> скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.



Решение

1. Задаём движение точки координатным способом:

$$x = \left(r + \frac{2}{3}L\right)\cos\varphi = \left(60 + \frac{2}{3}60\right)\cos 4\pi t = 100\cos 4\pi t;$$

$$y = \frac{1}{3}L\sin\varphi = \frac{1}{3}60\sin 4\pi t = 20\sin 4\pi t.$$

2. Для определения уравнения траектории точки исключим параметр t из уравнений движения:

$$\cos 4\pi t = \frac{x}{100}; \quad \sin 4\pi t = \frac{y}{20}.$$

Возводим в квадрат обе части уравнений и складываем:

$$\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1.$$

Получаем центральный эллипс с полуосями 100 см и 20 см.

3. Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_X = \dot{x} = -100 \cdot 4\pi \sin 4\pi t = -400\pi \sin 4\pi t,$$

$$V_Y = \dot{y} = 20 \cdot 4\pi \cos 4\pi t = 80\pi \cos 4\pi t.$$

При $\varphi = 0$ время t = 0. Проекции скорости принимают вид:

$$V_{x0} = 0\left(\frac{см}{с}\right); \quad V_{y0} = 80\pi\left(\frac{см}{с}\right).$$

Скорость точки при $t_0 = 0$:

$$V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2} = \sqrt{0 + (80\pi)^2} = 80\pi\left(\frac{см}{с}\right).$$

4. Определяем ускорение точки по ее проекциям на координатные оси:

$$a_X = \dot{V}_X = \ddot{x} = -400\pi \cdot 4\pi \cos 4\pi t = -1600\pi^2 \cos 4\pi t;$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = -80\pi \cdot 4\pi \sin 4\pi t = -320\pi^2 \sin 4\pi t.$$

В момент времени $t_0 = 0$ проекции ускорения на координатные оси принимают вид:

$$a_{X0} = -1600\pi^2 \left(\frac{см}{c^2} \right); \quad a_{Y0} = 0 \left(\frac{см}{c^2} \right).$$

Ускорение точки при $t_0 = 0$:

$$a_0 = \sqrt{a_{X0}^2 + a_{y0}^2} = \sqrt{\left(-1600\pi^2\right)^2 + 0^2} = 1600\pi^2 \left(\frac{см}{c^2} \right).$$

5. Определяем радиус кривизны траектории точки в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \text{ отсюда } \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_0 = 0$:

$$a_{\tau 0} = \frac{V_{X0} \cdot a_{X0} + V_{yo} \cdot a_{yo}}{V} = 0;$$

$$a_{n0} = \sqrt{a_0^2 - a_{\tau 0}^2} = a_0.$$

Радиус кривизны траектории в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$\rho_0 = \frac{V_0^2}{a_0} = \frac{(80\pi)^2}{1600\pi^2} = 4(см).$$

6. Определяем начальное положение точки М при $t_0 = 0$:

$$x_0 = 100(см); \quad y_0 = 0.$$

На чертеже показываются проекции скорости и ускорения точки при $t_0 = 0$.

<u>Ответ:</u> Эллипс $\dfrac{x^2}{100^2} + \dfrac{y^2}{20^2} = 1$, $V_0 = 80\pi \left(\dfrac{см}{c} \right)$, $a_0 = 1600\pi^2 \left(\dfrac{см}{c^2} \right)$, $\rho_0 = 4(см)$.

Задача№5 (12.22)

Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям x=300t, y=400t-5t^2 (t – в секундах, x,y –в метрах).

Найти:

1)скорость и ускорение в начальный момент;
2)высоту и дальность обстрела;
3)радиус кривизны траектории в начальный и наивысшей точках;
4)уравнение траектории.

Решение

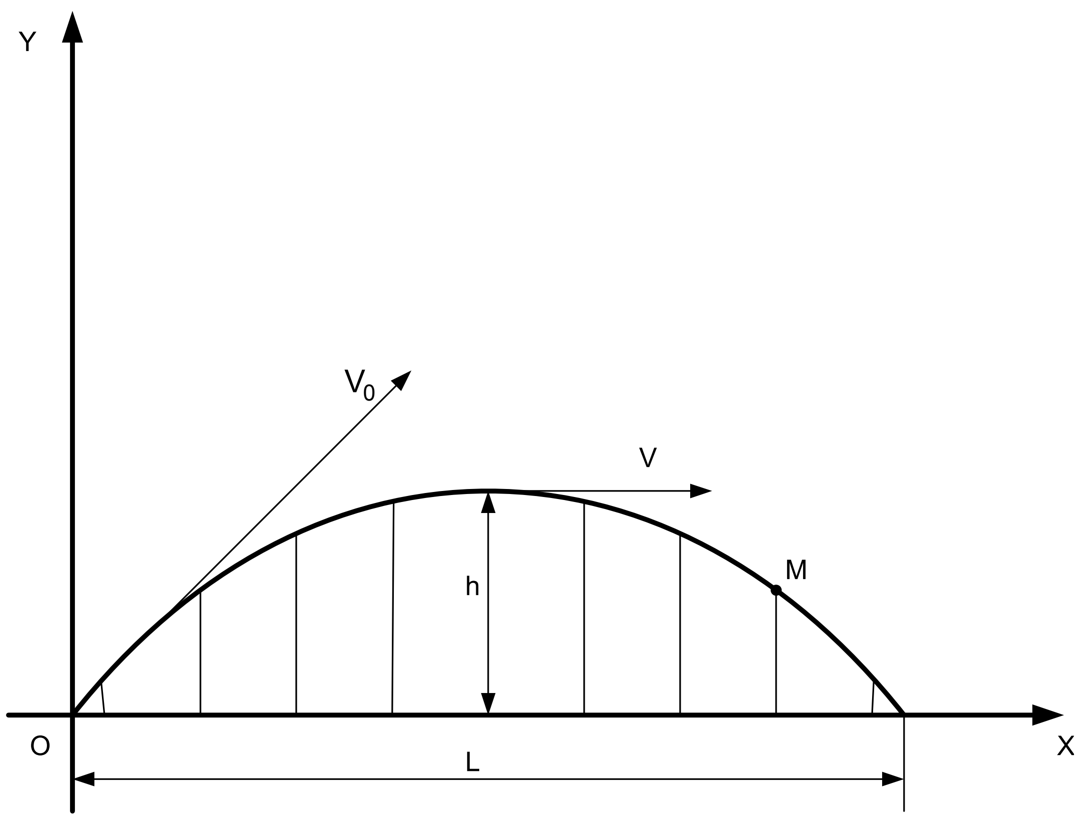
Определяем уравнение траектории движения снаряда, исключая из заданных уравнений параметр время t:

$$t = \frac{x}{300};\ y = 400\frac{x}{300} - 5\frac{x^2}{300^2}$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{300^2}x^2$$ – уравнение параболы.

Определяем координаты точек параболы в различные моменты времени:

t	0	1	2	3	80
x	0	300	600	900	2400
y	0	395	780	1155	0



Определяем скорость снаряда по проекциям на оси координат:

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 300\left(\frac{см}{c}\right);\ V_y = \frac{dy}{dt} = 400 - 10t\left(\frac{м}{c}\right).$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$V_{X0} = 300\left(\frac{м}{c}\right);\ V_{y0} = 400\left(\frac{м}{c}\right).$$

Следовательно:

$$V_0 = \sqrt{V_{X0}^2 + V_{y0}^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\left(\frac{м}{c}\right).$$

Ускорение точки также определяем по проекциям на оси координат:

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2} = 0\ ;\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -10\left(\frac{м}{c^2}\right).$$

Ускорение постоянно и в любой момент времени его модуль:

$$a = a_0 = \sqrt{a_X^2 + a_y^2} = 10\left(\frac{м}{c^2}\right).$$

Дальность полёта определяем из конечных условий: x=L; y=0, которые подставляем в уравнение траектории:

$$0 = \frac{4}{3}L - \frac{5}{300^2}L^2 \quad ,$$

отсюда $L = \dfrac{300^2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = 2.4 \cdot 10^4\, м = 24(км).$

Так как вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории, то высоту траектории h определяем из условия, что в наивысшей точке скорость направлена горизонтально:

$$V = V_X\ ;\ V_y = \dot{y} = 0\ .$$

Приравнивая V_y к нулю, получаем $t_1 = 40c$ - время достижения снарядом наивысшей точки траектории. В этот момент времени высота

$$h = y(t_1) = 400 \cdot 40 - 5 \cdot 40^2 = 8000(м) = 8(км).$$

Определяем касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V} = \frac{\dot{y}\ddot{y}}{V},\ \text{так как}\ \ddot{x} = 0\ .$$

Таким образом:

$$a_\tau = \frac{(400 - 10t)(-10)}{\sqrt{300^2 + (400 - 10t)^2}}.$$

Нормальное ускорение точки определяется из зависимости

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ , откуда}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{10^2 - \frac{\left(400-10t\right)^2 \cdot 10^2}{300^2 + \left(400-10t\right)^2}} = \frac{3000}{\sqrt{300^2 + \left(400-10t\right)^2}}.$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$a_{n0} = \frac{3000}{500} = 6\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

В момент времени $t_1 = 40$ с:

$$a_{n1} = \frac{3000}{300} = 10\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Радиус кривизны траектории определяется из формулы для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}\text{; откуда } \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

В момент времени $t_0 = 0$:

$$\rho_0 = \frac{V_0^2}{a_{n1}} = \frac{500^2}{6} = 4{,}167 \cdot 10^4 \left(м\right) = 41{,}67\left(км\right).$$

При $t = t_1 = 40\ с$ (в наивысшей точке траектории):

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{300^2}{10} = 9 \cdot 10^3 \left(м\right) = 9\left(км\right).$$

<u>Ответ:</u> $V_0 = 500\left(\frac{м}{с}\right)$, $a_0 = 10\left(\frac{м}{с^2}\right)$, $h = 8\left(км\right)$, $L = 24\left(км\right)$, $\rho_0 = 41{,}67\left(км\right)$, $\rho_1 = 9\left(км\right)$.

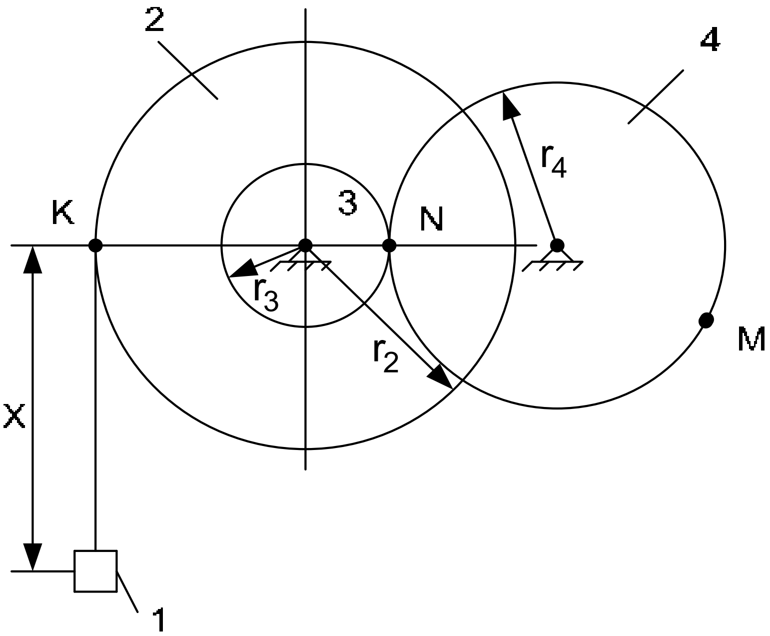
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ

Задача №1

Зубчатая передача приводится в движение грузом 1, подвешенным к колесу 2. На одной оси с колесом 2 укреплено колесо 3, которое сцепляется с колесом 4.

<u>Определить</u> скорость и ускорение точки М на ободе колеса 4 в момент времени t=1с. Груз движется по закону:

$x = 5t^2 + 10t\,(см)$. Радиусы колёс соответственно: $r_2 = 10\,(см)$, $r_3 = 6\,(см)$, $r_4 = 8\,(см)$.



Решение

Скорость и ускорение груза 1 будут совпадать со скоростью и вращательным ускорением точки К на ободе колеса 2, с которого сходит нить, к которой подвешен груз:

$$V_k = V_1 = \dot{x} = 10t + 10\,; \quad a_k^{вр} = a_1 = \ddot{x} = 10\left(\frac{см}{c}\right).$$

Так как колёса 2 и 3 имеют одну ось вращения, то угловая скорость и угловое ускорение у них одинаковые:

$$\omega_{2-3} = \frac{V_k}{r_2} = \frac{10t + 10}{10} = t + 1\left(c^{-1}\right);$$

$$\varepsilon_{2-3} = \frac{a_k^{вр}}{r_2} = \frac{10}{10} = 1\left(c^{-2}\right).$$

Точка N – точка соприкосновения колёс 3 и 4. Скорость этой точки и вращательное ускорение для колес 3 и 4 будут одинаковые:

$$V_N = \omega_{2-3} \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4;$$

отсюда $$\omega_4 = \frac{\omega_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{(t+1)\cdot 6}{8} = \frac{(t+1)\cdot 3}{4}\left(c^{-1}\right);$$

$$a_N^{вр} = \varepsilon_{2-3} \cdot r_3 = \varepsilon_4 \cdot r_4;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{1 \cdot 6}{8} = \frac{3}{4}\left(c^{-2}\right).$$

Скорость точки М:

$$V_M = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{(t+1) \cdot 3}{4} \cdot 8 = 6t + 6\left(\frac{см}{c}\right);$$

в момент t=1c:

$$V_{M1} = 6 + 6 = 12\left(\frac{см}{c}\right).$$

Ускорение точки М:

$$a_M^{вр} = \varepsilon_4 \cdot r_4 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

$$a_M^{ц} = \omega_4^2 \cdot r_4 = \left(\frac{(t+1) \cdot 3}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{9(t+1)^2}{2}\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

в момент t=1c:

$$a_{M1}^{ц} = \frac{9 \cdot 2^2}{2} = 18\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^{вр}\right)^2 + \left(a_M^{ц}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = 18.97\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

<u>Ответ:</u>

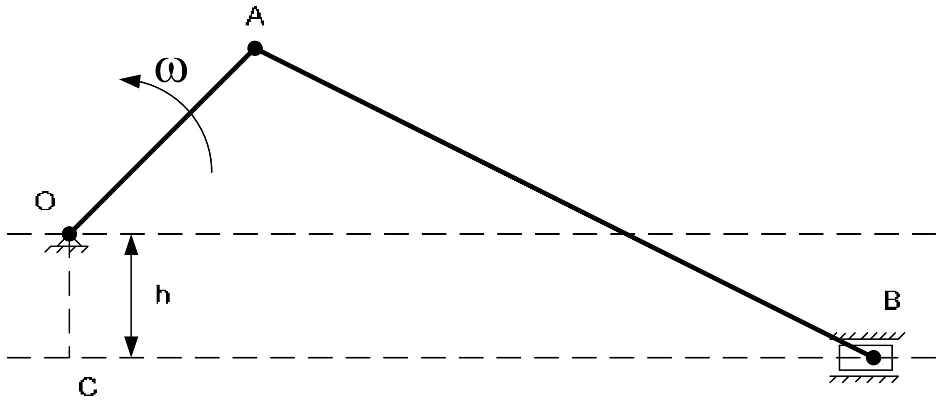
$$V_M = 12\left(\frac{см}{c}\right),\ a_M = 18.97\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Задача №1 (16.16)

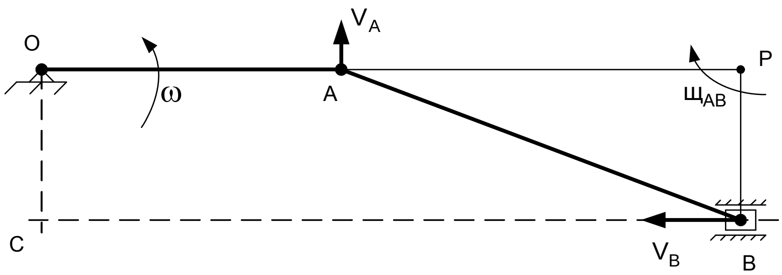
<u>Найти</u> скорость ползуна В нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала О с угловой скоростью $\omega = 1.5\frac{рад}{c}$, если

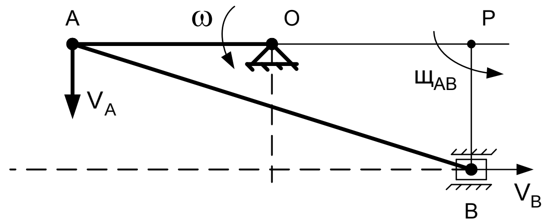
ОА = 40 см, АВ = 200 см, ОС = 20 см.



Решение

1. Горизонтальные положения кривошипа OA.





Кривошипный механизм совершает плоское движение, непоступательное, следовательно, в каждый момент времени существует единственная точка, скорость которой равна 0.

МЦС (точка P) находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точки A и из точки B к их скоростям. Точка A совершает вращательное движение вместе с кривошипом, значит, ее скорость направлена перпендикулярно к радиусу вращения OA. Ползун B движется поступательно горизонтально, его скорость также направлена горизонтально.

Скорости точек A и B равны произведению угловой скорости ω_{AB} на расстояние от этих точек до МЦС. Направление угловой скорости ω_{AB} определяется направлением V_A.

Скорость точки A :

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega_{AB} \cdot AP.$$

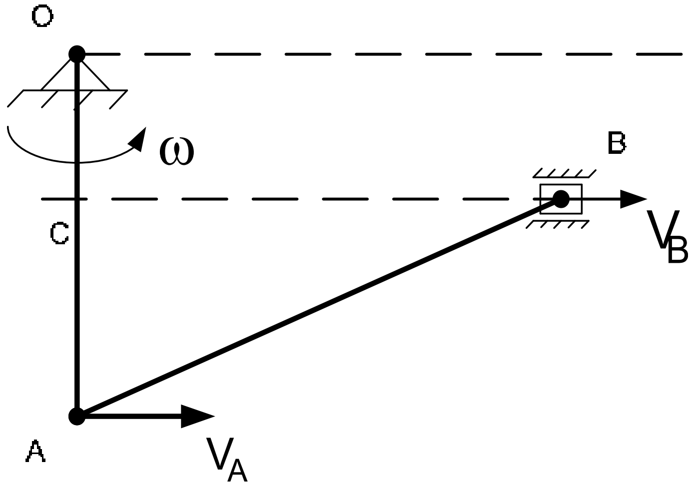
Отсюда

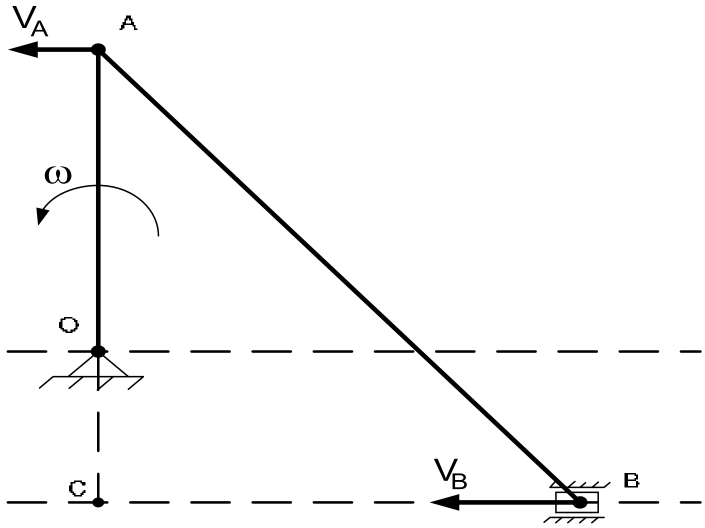
$$\omega_{AB} = \frac{\omega \cdot OA}{AP} = \frac{\omega \cdot (OA)}{\sqrt{(AB)^2 - (BP)^2}} = \frac{1.5 \cdot 40}{\sqrt{200^2 - 20^2}} = \frac{60}{\sqrt{39600}} = \frac{60}{199} = 0.3015\left(c^{-1}\right).$$

Скорость точки B:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = \omega_{AB} \cdot h = 0.3015 \cdot 20 = 6.03\left(\frac{см}{с}\right).$$

2. Вертикальные положения кривошипа OA.





При вертикальных положениях кривошипа OA МЦС находится в бесконечности, поэтому: $V_B = V_A = \omega \cdot OA = 1.5 \cdot 40 = 60\left(\frac{см}{с}\right).$

<u>Ответ:</u> горизонтальные положения –

$$V_B = 6.03\left(\frac{см}{с}\right),$$

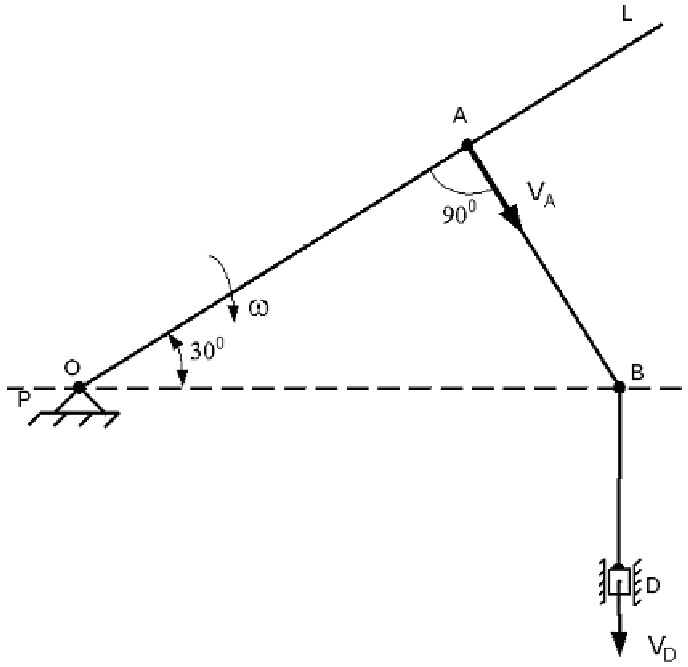
вертикальные положения –

$$V_B = 60\left(\frac{см}{с}\right).$$

Задача №2 (16.24)

Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма OABD. В положении, указанном на рисунке, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega = 2\dfrac{рад}{c}$.

<u>Определить</u>: скорость поршня D и угловую скорость звена AB, если OA=15 см.



Решение:

Шарнирно-рычажный механизм совершает плоско-параллельное движение. МЦС звена AB (точка P) совпадает с точкой O.
Скорость точки A:

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega_{AB} \cdot AP;$$

$$\omega_{AB} = \frac{\omega \cdot OA}{AP} = \frac{\omega \cdot OA}{OA} = \omega = 2\left(\frac{1}{c}\right).$$

Поршень BD вместе со штоком совершает поступательное движение:

$$V_D = V_B = \omega_{AB} \cdot BP = \omega_{AB}\frac{OA}{\cos 30^0} = 2\frac{15 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} = 34,6\left(\frac{см}{c}\right).$$

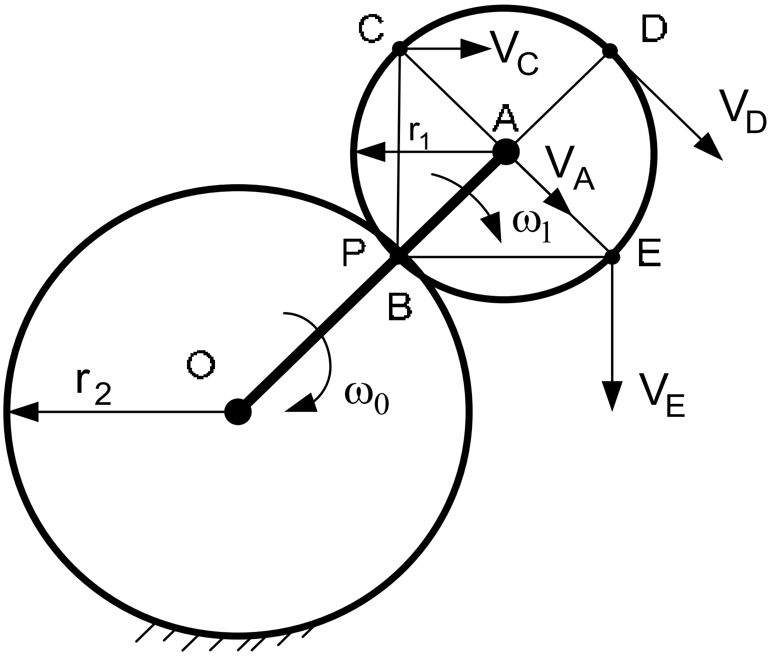
<u>Ответ:</u>

$$V_D = 34,6\left(\frac{см}{c}\right), \quad \omega_{AB} = 2\left(\frac{1}{c}\right).$$

Задача №3 (16.35)

Кривошип ОА, вращаясь с угловой скоростью $\omega_0 = 2,5\dfrac{рад}{с}$ вокруг оси О неподвижного колеса радиуса $r_2 = 15(см)$, приводит в движение насаженную на его конец А шестерёнку радиуса $r_1 = 5(см)$.

Определить: величину и направление скоростей точек A, B, C, D, E подвижной шестерёнки, если $CE \perp BD$.



Решение

Определяем скорость точки А как точки, принадлежащей вращающемуся кривошипу ОА.

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0(r_1 + r_2) = 2.5(5+15) = 50\left(\frac{см}{с}\right).$$

Скорость точки А направлена по перпендикуляру к кривошипу ОА и согласована с направлением угловой скорости ω_0.

Определяем угловую скорость подвижной шестерёнки 1, которая катится без скольжения по неподвижной шестерёнке 2.

Шестерёнка 1 совершает плоское движение. МЦС находится в точки касания с неподвижной шестерёнкой.

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{r_1} = \frac{50}{5} = 10\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Угловая скорость направлена по часовой стрелке.

Определяем скорости точек C, D, E:

$$V_C = V_E = \omega_1 \cdot CP = \omega_1 \cdot r\sqrt{2} = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 70,7\left(\frac{см}{с}\right);$$

$$V_D = \omega_1 \cdot DP = 10 \cdot 10 = 100\left(\frac{см}{с}\right).$$

Скорости точек C, D, E направлены по перпендикулярам, соединяющим эти точки с МЦС, совпадающем с точкой B.

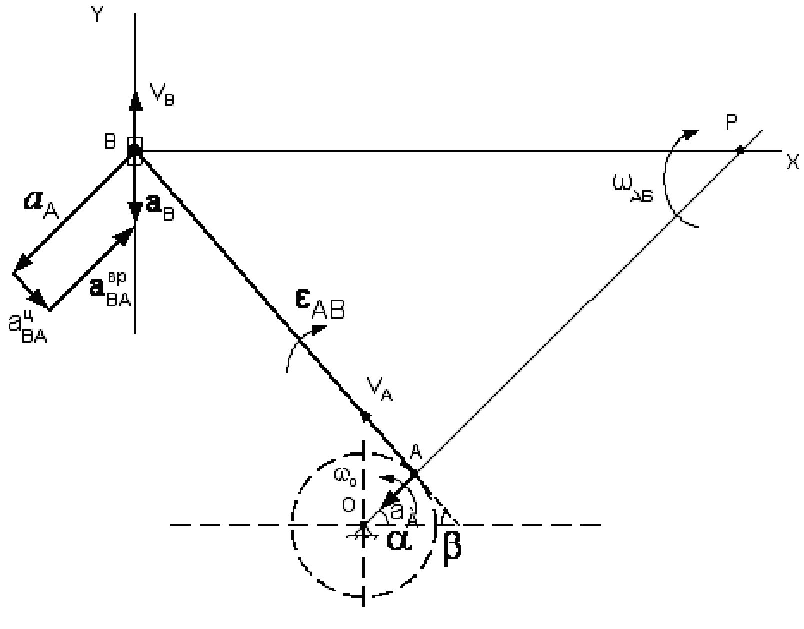
Ответ: $V_A = 50\left(\frac{см}{с}\right)$, $V_B = 0$, $V_C = V_E = 70,7\left(\frac{см}{с}\right)$, $V_D = 100\left(\frac{см}{с}\right)$.

Задача №4 (18.11)

Кривошип OA длиной 20 см вращается равномерно со скоростью $\omega_0 = 10\frac{рад}{с}$ и приводит во вращение шатун AB длиной 100 см; ползун B движется по вертикали.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 45^0$.

Решение



1. Определяем скорость точки A:

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200\left(\frac{см}{с}\right).$$

V_A направлена по перпендикуляру к OA и согласована с направлением ω_0.

2. Определяем скорость точки B.

Шатун AB совершает плоское движение. МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B.

Угловая скорость звена АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2\left(\frac{рад}{с}\right);$$

ω_{AB} направлена по часовой стрелке :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 2 \cdot 100\sqrt{2} = 282{,}8\left(\frac{см}{с}\right);$$

V_B направлена по направляющей вверх.

3. Определяем ускорение точки А:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{ц} + \overline{a}_A^{вр};$$

$$a_A^{ц} = \omega_0^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 20 = 2000\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

$a_A^{вр}$ направлено к оси вращения звена АО:

$$a_A^{вр} = \varepsilon_0 \cdot AO = 0,$$

так как $\omega_0 = const$, $\varepsilon_0 = \dfrac{d\omega_0}{dt} = 0$,

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{ц}\right)^2 + \left(a_A^{вр}\right)^2} = 2000\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

4.Определение ускорения точки В:

Принимаем за полюс точку А и пользуясь теоремой об ускорениях плоской фигуры запишем:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}. \qquad (*)$$

Центростремительное ускорение во вращательном движении точки вокруг полюса А:

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 100 = 400\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Вращательное ускорение:

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Чтобы найти ε_{AB}, воспользуемся графическим построением:

- отложим из точки В ускорение полюса А: $\overline{a}_A$;

- из конца вектора $\overline{a}_A$ отложим $\overline{a}_{AB}^{ц}$ в направлении оси от точки В к полюсу А;

- из конца $\overline{a}_{AB}^{ц}$ проведём направление $\overline{a}_{AB}^{вр}$ до пересечения с направлением $\overline{a}_B$;

- $\overline{a}_B$ направлено по вертикали;
- $\overline{a}_{AB}^{вр}$ перпендикулярно $\overline{a}_{AB}^{ц}$.

Расставим стрелки согласно векторному равенству $(*)$.

Векторное равенство $(*)$ содержит 2 неизвестные алгебраических значения a_B и $a_{AB}^{вр}$.

Спроектируем векторное равенство $(*)$ на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

$$0 = -a_A \cdot \cos 45^o + a_{BA}^{ц} \cdot \cos 45^o + a_{BA}^{вр} \cdot \cos 45^o.$$

Отсюда

$$a_{BA}^{вр} = a_A - a_{BA}^{ц} = 2000 - 400 = 1600\, см/с^2.$$

Угловое ускорение ε_{AB}:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{1600}{100} = 16\, рад/с^2.$$

Угловое ускорение направлено в такую сторону, в которую вектор $\overline{a}_{BA}^{вр}$, помещённый в точку B, стремится повернуть плоскость относительно полюса A, то есть по часовой стрелке.

На ось Y:

$$-a_B = -a_A \cos 45^o - a_{BA}^{ц} \cos 45^o + a_{BA}^{вр} \cos 45^o.$$

Отсюда

$$a_B = \left(a_A + a_{BA}^{ц} - a_{BA}^{вр}\right)\cos 45^o = \left(2000 + 400 - 1600\right) \cdot 0,707 = 565,6\, см/с^2.$$

5. Определяем скорость точки B пользуясь теоремой о скоростях точек плоской фигуры:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (**)$$

$\vec{V}_{BA}$ - вращательная скорость точки B при вращении вокруг полюса A.

$$V_{BA} = \omega_{AB} AB$$

$\vec{V}_{BA}$ направлена перпендикулярно радиусу вращения AB.

Построим графически равенство (**):

- отложим из точки B скорость полюса $\overline{V}_A$;
- из конца вектора $\overline{V}_A$ проведём направление $\overline{V}_{AB}$ до пересечения с направлением $\overline{V}_B$.

Расставим стрелки согласно равенству (**).

Спроектируем векторное равенство (**) на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

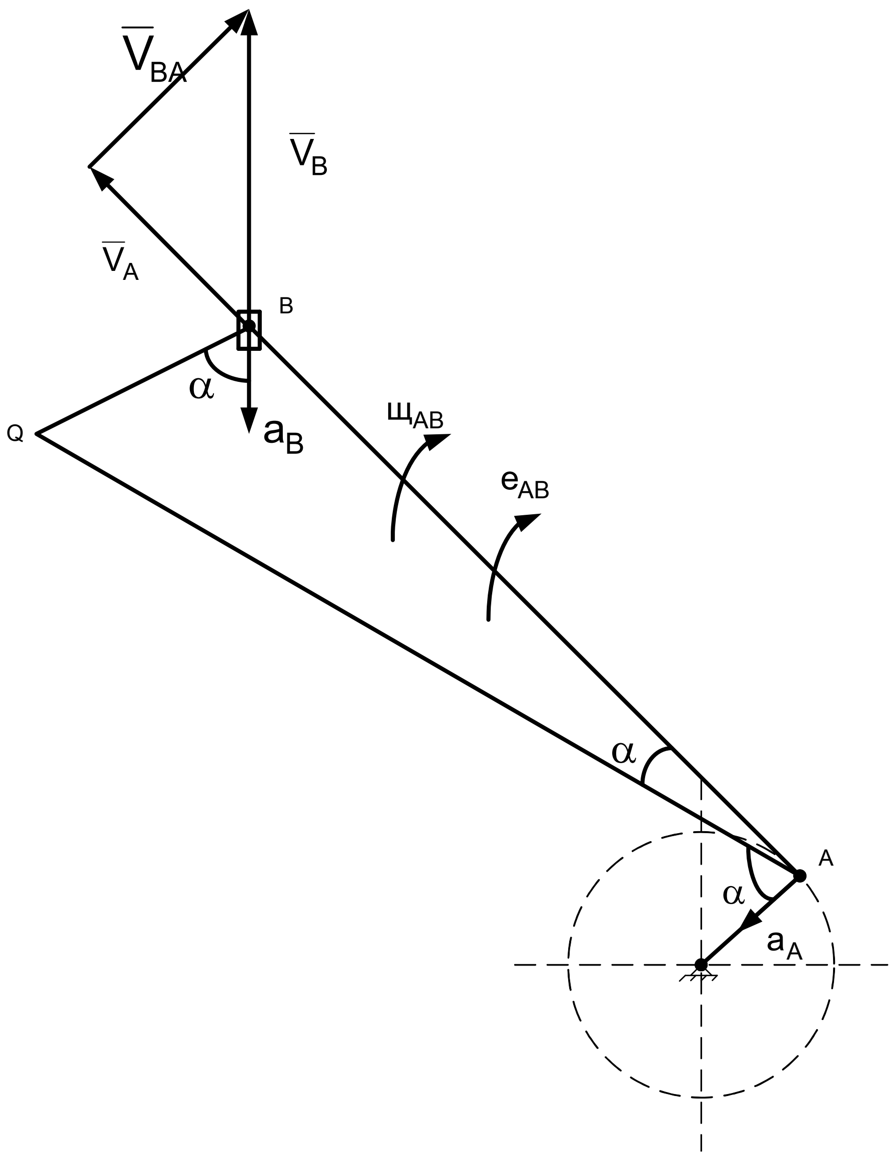
$$0 = -V_A \cos 45^o + V_{BA} \cos 45^o.$$

Отсюда $V_A = V_{AB}$.

Угловая скорость ω_{AB}:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2\left(\frac{рад}{c}\right).$$

На ось Y:



$$V_{By} = V_A \cos 45^o + V_{BA} \cos 45^o = 2V_A \cos 45^o = 2 \cdot 200 \cdot 0,707 = 282,8\ см/с.$$

6. Определяем ускорение точки B, пользуясь мгновенным центром ускорений:

$$a_B = QB\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}\ ;$$

Тангенс угла между отрезком AQ, соединяющим точку A с мгновенным центром ускорений

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \frac{16}{2^2} = 4;$$

$$\alpha = 75,96^o.$$

Угол α откладывается от оси ускорения точки A по часовой стрелке, то есть так же, как угловое ускорение ε_{AB}.

Расстояние точки A до мгновенного центра ускорений AQ:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{2000}{\sqrt{16^2 + 2^4}} = 121,27\ см.$$

Для определения расстояния точки B до мгновенного центра ускорений рассмотрим треугольник ABQ:

$$\angle QAB = 90 - \alpha = 90^o - 75,96^o = 14,04^o.$$

По теореме косинусов:

$$QB = \sqrt{AB^2 + AQ^2 - 2\cdot AB\cdot AQ\cdot\cos\left(90^O - \alpha\right)} =$$

$$= \sqrt{100^2 + 121,27^2 - 2\cdot 100\cdot 121,27\cdot 0,97} = 34,35\ см.$$

Ускорение точки B определяется из соотношения:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ}\text{ ,откуда}$$

$$a_B = \frac{a_A}{AQ}\cdot BQ = \frac{2000}{121.27}\cdot 34.35 = 566.5\ см/с^2.$$

Для определения направления $\overline{a}_B$ откладываем угол α оси отрезка QB в направлении, противоположном направлению ε_{AB}, то есть против хода часовой стрелки.

Ответ:

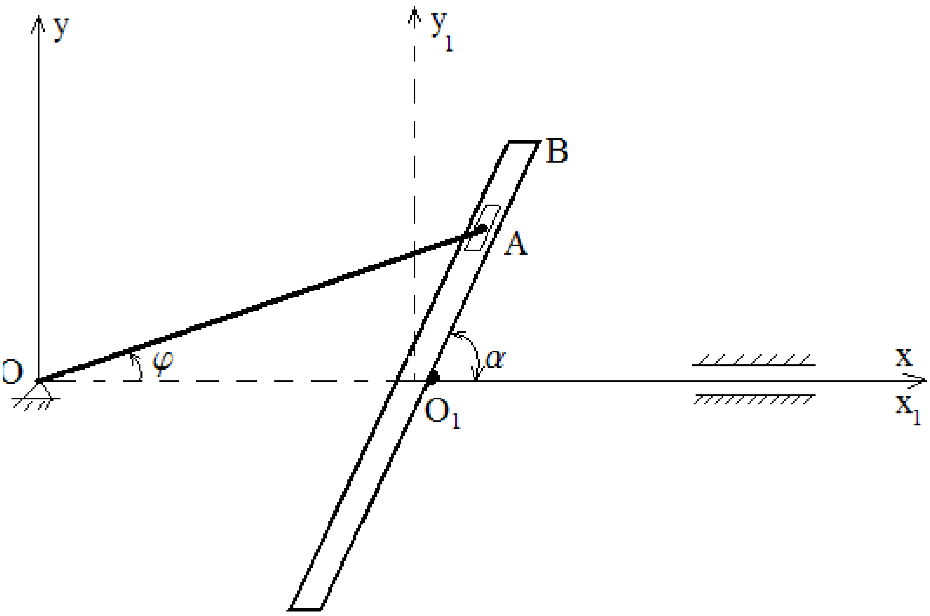
$$\varepsilon_{AB} = 16\ рад/с^2,\ \omega_{AB} = 2\left(\frac{рад}{с}\right),\ a_B = 566.5\ см/с^2.$$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Задача №1

Кривошип ОА = r, вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки О согласно уравнению φ = kt. Ползун А при этом перемещается в наклонной кулисе В, которая может передвигаться поступательно вдоль оси Ох. Угол наклона кулисы к оси Ох равен α.

Составить уравнения абсолютного и относительного движений точки А, а также найти абсолютную, относительную и переносную скорости точки.



Решение

Первый способ.

Абсолютное движение ползуна А – вращение вокруг неподвижного центра О. Относительное движение – прямолинейное движение ползуна вдоль кулисы, определяемое переменным расстоянием $O_1A = \eta$. Переносное движение – поступательное перемещение точки А вместе с кулисой.

Уравнения абсолютного движения точки А имеют вид

$$x = r\cos kt,\ y = r\sin kt. \tag{1}$$

С другой стороны, обозначая расстояние $OO_1 = x_e$, имеем:

$$x = x_e + \eta\cos\alpha,\ y = \eta\sin\alpha. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), после несложных преобразований находим:

$$\eta = r\frac{\sin kt}{\sin\alpha}, \tag{3}$$

$$x_e = r\cos kt - r\sin(kt)ctg\alpha. \tag{4}$$

Уравнение (3) является уравнением относительного движения точки А. Уравнение (4), с точностью до постоянной величины, является уравнением переносного движения, так как последнее является поступательным.

Определим абсолютную скорость точки А. Проекции скорости

$$V_x = \dot{x} = -rk\sin kt, V_y = \dot{y} = rk\cos kt,$$

модуль абсолютной скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = rk,$$

а направляющие косинусы имеют вид

$$\cos(\vec{V}, x) = \frac{\dot{x}}{V} = -\sin kt, \cos(\vec{V}, y) = \frac{\dot{y}}{V} = \cos kt, \tag{5}$$

Из (5) видно, что абсолютная скорость точки А перпендикулярна к кривошипу ОА.

Проекция относительной скорости точки А на направление O_1A равна производной от относительной координаты по времени

$$V_{r\eta} = \dot{\eta} = rk\frac{\cos kt}{\sin\alpha},$$

так как относительное движение является прямолинейным. Проекция переносной скорости точки А на ось x

$$V_{ex} = \dot{x}_e = -rk\sin kt - rk\cos(kt)ctg\alpha,$$

так как переносное движение является поступательным и, следовательно, скорости всех точек кулисы одинаковы.

Второй способ.

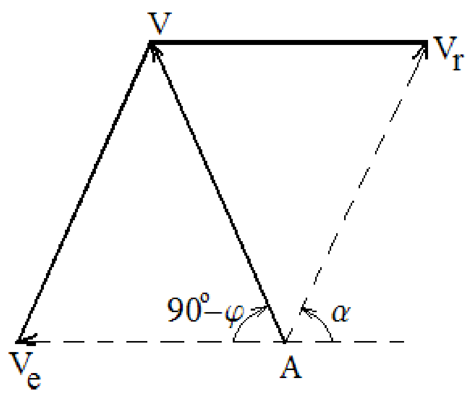
Находим величину угловой скорости кривошипа ОА

$$\omega = \dot{\varphi} = k.$$

Величина абсолютной скорости точки А как конца кривошипа, вращающегося вокруг неподвижного центра О,

$$V = r\omega = rk.$$

Направлена эта скорость перпендикулярно к кривошипу. Относительная скорость точки А направлена вдоль прямой O_1A. Переносная скорость точки А параллельна оси Ох. Строим параллелограмм скоростей. Откладываем вектор, равный абсолютной скорости точки А. На этом отрезке, как на диагонали, строим параллелограмм скоростей, проводя линии, параллельные относительной и переносной скоростям, величины которых известны. Эти величины определяются как стороны



параллелограмма.

По теореме синусов имеем:

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{V_r}{\cos kt} = \frac{V_e}{\cos(kt-\alpha)}.$$

Отсюда находим модуль относительной скорости

$$V_r = rk\frac{\cos kt}{\sin\alpha}.$$

Проекция переносной скорости на ось x будет:

$$V_{ex} = -rk(\sin kt + \cos(kt)ctg\alpha).$$

Второй способ решения быстрее и проще ведет к цели, если требуется определить только скорости в абсолютном, переносном и относительном движениях. Если же необходимо, кроме этих скоростей, найти и уравнения абсолютного, переносного и относительного движений, то целесообразно применить первый способ решения.

Ответ: уравнения абсолютного движения

$$x = r\cos kt, y = r\sin kt,$$

уравнения относительного движения

$$\eta = r\frac{\sin kt}{\sin\alpha},$$

абсолютная скорость

$$V = rk,$$

относительная скорость

$$V_r = rk\frac{\cos kt}{\sin\alpha},$$

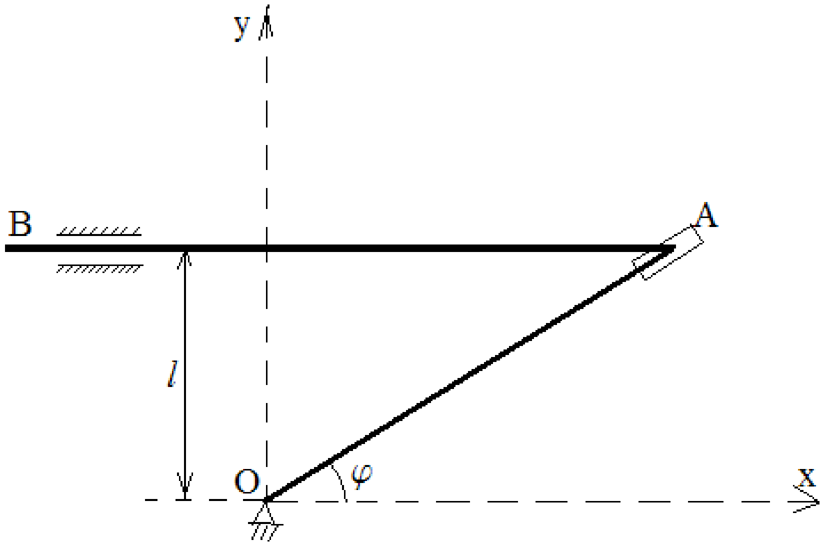
переносная скорость

$$V_{ex} = -rk(\sin kt + \cos(kt)ctg\alpha).$$

Задача №2

Для сообщения поступательного движения в станках применяют механизм, состоящий из прямолинейного стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки О так, что угол φ=ωt. Дойдя до упора, стержень начинает вращаться с той же угловой скоростью в противоположном направлении Ползун А вращается вместе со стержнем и одновременно может перемещаться вдоль стержня. Прямая АВ, шарнирно соединенная с ползуном, движется в горизонтальных направляющих, осуществляя возвратно-поступательное движение.

Зная расстояние l от шарнира О до прямой АВ, определить ее скорость и ускорение в поступательном движении.



Решение

Первый способ

Проведем неподвижные оси координат с началом в шарнире O. Тогда координаты точки A определяются уравнениями

$$x = lctg(\omega t), y = l.$$

Величина скорости точки A тогда будет:

$$V = \frac{dx}{dt} = -\frac{l\omega}{\sin^2 \omega t}, \qquad (1)$$

так как точка A движется прямолинейно. Величина ускорения точки A определится как производная от скорости по времени.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^3 \omega t}, \qquad (2)$$

Второй способ.

Рассмотрим абсолютное движение точки A ползуна как составное: переносное – вращение вместе со стержнем OA и относительное – прямолинейное движение вдоль стержня OA. Тогда модуль переносной скорости точки A будет:

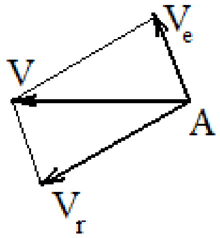
$$V_e = OA \cdot \omega = \frac{l\omega}{\sin \varphi}.$$

Направлена переносная скорость перпендикулярно к стержню OA, следовательно, она образует со стержнем AB угол 90°–φ. Относительная скорость (в прямолинейном движении по OA) равна производной от OA по времени и направлена по OA

$$V_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{l}{\sin \omega t}\right) = -\frac{l\omega \cos \omega t}{\sin \omega t}.$$

Проектируя векторное равенство

$$\overline{V} = \overline{V}_e + \overline{V}_r,$$



определяющее абсолютную скорость точку А, на направление АВ, находим:

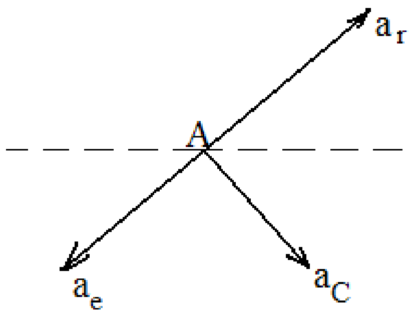
$$V = -V_e \sin \omega t + V_r \cos \omega t = -l\omega\left(1 + \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t}\right) = -\frac{l\omega}{\sin^2 \omega t},$$

что совпадает с (1).

Переходим к определению абсолютного ускорения точки А.

Согласно теореме сложения ускорений

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_C. \tag{3}$$



Так как ω=const, то величина переносного ускорения будет:

$$\overline{a}_e = (OA)\omega^2 = \frac{l\omega^2}{\sin \omega t}.$$

Оно направлено от А к центру О. Значение относительного ускорения в прямолинейном движении равно

$$\overline{a}_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{l\omega^2(1 + \cos^2 \omega t)}{\sin^2 \omega t}.$$

Оно направлено по прямой ОА. Ускорение Кориолиса равно по величине

$$\overline{a}_C = 2\omega V_r \sin 90^\circ = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^2 \omega t}.$$

Направление ускорения определится поворотом вектора относительной скорости на 90° в сторону переносного вращения, так как в рассматриваемом случае перпендикулярно к . Проектируя, далее, векторное равенство на направление абсолютного ускорения, совпадающего с осью х, находим

$$a = (-a_e + a_r)\cos \omega t + a_C \sin \omega t = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^3 \omega t}.$$

что совпадает с (2).

Ответ:

$$V = \frac{dx}{dt} = -\frac{l\omega}{\sin^2 \omega t}, \; a = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^3 \omega t}.$$

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2001.Ч.1,2.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2002.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - СПб.: Лань, I998.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2003.
5. Попов М.В. Теоретическая механика. - М.: Наука, 1986.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А.Яблонского.- СПб.: Лань, 2001.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, I998.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 1998.Ч.1,2

Содержание

Учебное издание

Кузнецова Наталья Владимировна
Головко Виктор Евгеньевич
Саблина Маргарита Владимировна
Петров Сергей Гаррикович

Кинематика

Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Н.П.Новикова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2009 г., поз.62

Подп. к печати 21.05.09. Формат 60х84/16.
Бумага тип. №1. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,5. Усл. печ. л., 3,5.
Тираж 100 экз. Изд. № 44. Цена "С". Заказ 1958

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.